ĆWICZENIA NR 1 Z MATEMATYKI (Finanse i Rachunkowość, studia zaoczne, I rok)

Zad. 1. Wyznaczyć dziedziny funkcji:

a) $f(x)=\sqrt{1-\frac{1}{x}}$, **b)** $f(x)=\sqrt{5x-x^2}+\frac{1}{x^2-5x+6}$, **c)** $f(x)=\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}$, **d)** $f(x)=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$,

e) $f(x)=3\ln\left(x^2-4\right)$, **f)** $f(x)=2\ln(x+1)+\ln(x-1)$, **g)** $f(x)=\ln(\sin x)$, **h)** $f(x)=\ln(\cos x)$,

i) $f(x)=tg\,x$, **j)** $f(x)=\ln(tg\ x)$.

Zad. 2. Zbadać, czy dane funkcje są różnowartościowe:

a) $f(x)=mx+k$; $m\neq 0$, **b)** $f(x)=x^3+2x$, **c)** $f(x)=x^2-3x$, **d)** $f(x)=2^x$, **e)** $f(x)=2^x+1$.

Zad. 3. Sprawdzić, które z podanych funkcji są parzyste lub nieparzyste, a które nie są ani parzyste, ani nieparzyste:

a) $f(x)=\sqrt{x^2-1}$, **b)** $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$, **c)** $f(x)=\frac{x}{1-x}$.

Zad. 4. Ustalić, czy podana funkcja ma funkcję odwrotną, a jeśli tak, to wyznaczyć wzór funkcji odwrotnej (sprawdzić poprawność otrzymanych wzorów funkcji odwrotnych):

a) $f(x)=\frac{1}{3}x+1$, **b)** $f(x)=\sqrt{2x+3}$, **c)** $f(x)=\frac{1}{x-2}$, **d)** $f(x)=x^2-2x$; $x\geq 1$, **e)** $f(x)=4x^3+1$.

Zad. 5. Wyznaczyć dziedziny i zbiory wartości funkcji f, g, a następnie, ustalić, czy istnieją złożenia $f\circ g$, $g\circ f$ i, jeśli tak, to wyznaczyć wzory na te złożenia:

a) $f(x)=3x+1$, $g(x)=x^2-2$, **b)** $f(x)=x^2-3x$, $g(x)=x^3$, **c)** $f(x)=\log x$, $g(x)=x+3$.

Zad. 6. Przedstawić poniższe funkcje jako złożenia funkcji prostszych:

a) $h(x)=\left(1-3x^2\right)^5$, **b)** $h(x)=\sqrt[3]{4+3x}$, **c)** $h(x)=\frac{1}{\left(1-x^2\right)^4}$, **d)** $h(x)=tg(2x)$.

Zad. 7. Sporządzić (dla każdego podpunktu na tym samym rysunku) wykresy funkcji:

a) $f_1(x)=\ln x$, $f_2(x)=|\ln x|$;

b) $f_1(x)=\ln x$, $f_2(x)=\ln x+1$;

c) $f_1(x)=\ln x$, $f_2(x)=\ln(x+1)$;

d) $f_1(x)=e^x$, $f_2(x)=e^{-x}$;

e) $f_1(x)=x^2$, $f_2(x)=(x-2)^2$, $f_3(x)=x^2-2$, $f_4(x)=-x^2+2$;

f) $f_1(x)=x^3$, $f_2(x)=x^3+1$, $f_3(x)=(x+1)^3$, $f_4(x)=\left|x^3\right|$;

g) $f_1(x)=x$, $f_2(x)=x^2$, $f_3(x)=\sqrt{x}$, $f_4(x)=x^3$, $f_5(x)=\sqrt[3]{x}$;

h) $f_1(x)=\frac{1}{x}$, $f_2(x)=\frac{1}{x^2}$, $f_3(x)=\frac{1}{x^3}$, $f_4(x)=\frac{1}{x^4}$;

i) $f_1(x)=\sin x$, $f_2(x)=2\sin x$, $f_3(x)=\sin 2x$;

j) $f_1(x)=\cos x$, $f_2(x)=2\cos x$, $f_3(x)=\cos 2x$.

ĆWICZENIA NR 2 Z MATEMATYKI (Finanse i Rachunkowość, studia zaoczne, I rok)

Zad. 1 (uzupełnienie do poprzednich ćwiczeń, dotyczące monotoniczności funkcji jednej zmiennej). Korzystając z definicji monotoniczności funkcji, zbadać monotoniczność funkcji f w zbiorze A, jeśli:

a) $f(x)=-\frac{2}{x}$; $A=R_+$, **b)** $f(x)=\frac{4}{x^2+1}$; $A=(-\infty;0)$, **c)** $f(x)=x^2-2x$; $A=(1;+\infty)$, **d)** $f(x)=\sqrt{x+3}$; $A=(-3;+\infty)$.

Zad. 2. Zbadać monotoniczność ciągów o podanych wyrazach ogólnych:

a) $a_n=\frac{2n-3}{n+3}$, **b)** $a_n=n-n^2$, **c)** $a_n=n^2+6n$, **d)** $a_n=\frac{n}{2^n}$, **e)** $a_n=\frac{2^n}{n!}$, **f)** $a_n=\frac{1+(-1)^n}{2}$, **g)** $a_n=\sin\frac{n\pi}{2}$,

h) $a_n=\frac{3}{2n+1}$, **i)** $a_n=\frac{5n-1}{n+2}$.

Zad. 3. Obliczyć granice:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2-4n}{n^2+1}$, **b)** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-2n+3)(n^2+4)}{(3n+1)(2n-7)}$, **c)** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n}+11}{3n-15}$, **d)** $\lim\limits_{n\to\infty}(-5n^4+2n^3-4n^2+n-5)$,

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4+8+...+4n}{n^2}$, **f)** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+...+\frac{1}{3^n}}$, **g)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+4}{n}\right)^{3n}$, **h)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n-3}$, **i)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n}\right)^{3n+1}$,

j) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n-1)^2}{(4n-1)(3n+2)}$, **k)** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-5n^6+n^5+1}{3n^4+2}$, **l)** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+4+7+...+(3n-2)}{n^2}$, **ł)** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+...+n}{3n^2}$,

m) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+5}{n}\right)^{2n+1}$, **n)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+4}{n+7}\right)^{3n+1}$.

Zad. 4. Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach, obliczyć granice:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{4+\frac{1}{n}}$, **b)** $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{6^n+3\cdot 7^n+4\cdot 8^n}$, **c)** $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+5\cdot 4^n+1}$, **d)** $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^n+5^n+7^n}$,

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3\cdot 5^n+5\cdot 6^n}$.

Zad. 5. Do banku wpłacono 6000 zł na dwumiesięczny wkład terminowy, przy oprocentowaniu prostym z roczną stopą oprocentowania $r=0{,}18$. Wpłacający zamierza utrzymać tę lokatę przez dwa lata, przy gwarancji, że stopa procentowa nie ulegnie zmianie. Ustalić:
a) ile wyniosą odsetki za okres dwóch lat,
b) po jakim okresie (w latach) wartość odsetek wyniesie 5000 zł.

Zad. 6. Kapitał 5000 zł można ulokować na dwa lata, przy oprocentowaniu składanym, w jednym z banków A lub B. W banku A stosowane jest oprocentowanie co pół roku, przy <u>rocznej</u> stopie procentowej $r=0{,}2$, natomiast w banku B co kwartał, przy <u>rocznej</u> stopie procentowej również wynoszącej $r=0{,}2$. Wyznaczyć, jakim kapitałem będziemy dysponować po dwóch latach, korzystając z oferty banku A, a jaką, korzystając z oferty banku B.

Zad. 7. Pewien bank udziela kredytu mieszkaniowego w wysokości 25000 zł, na procent składany, naliczany co kwartał, przy <u>rocznej</u> stopie procentowej $r=0{,}12$. Ustalić, po jakim czasie wysokość naliczonych odsetek osiągnie wartość kredytu.

ĆWICZENIA NR 3 Z MATEMATYKI (Finanse i Rachunkowość, studia zaoczne, I rok)

Zad. 1. Wyznaczyć granice funkcji:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x-1}$, **b)** $\lim\limits_{x\to -3}\frac{x+3}{x^2+x-6}$, **c)** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}$, **d)** $\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{-5x}{x-2}$, **e)** $\lim\limits_{x\to 4^+}\frac{-2}{4-x}$,

f) $\lim\limits_{x\to 3/2^+}\frac{2x-4}{3-2x}$, **g)** $\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{2x-1}{x^2-4}$, **h)** $\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{2x-5}{x^2-7x+12}$, **i)** $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^3-8}$, **j)** $\lim\limits_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$,

k) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}$, **l)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin x}$, **ł)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{\sin 5x}$, **m)** $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{-5x^3+2x^2-1}{x^2-5x}$,

n) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(-3x^5+5x^3-4x^2+x-2\right)$, **o)** $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x-4}$, **p)** $\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{-x}{3-x}$, **r)** $\lim\limits_{x\to 7}\frac{\sqrt{x-6}-1}{x-7}$.

Zad. 2. Zbadać ciągłość funkcji f, jeśli (w przypadku punktów g), h) naszkicować również wykresy funkcji):

a) $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2+x-2}{x^2-1}, & gdy\ x\in R-\{-1,1\},\\ 1, & gdy\ x=-1,\\ -1, & gdy\ x=1;\end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases}\frac{x-1}{x^2+x-2}, & gdy\ x\in R-\{-2,1\},\\ \frac{1}{3}, & gdy\ x=-2\vee x=1;\end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases}x, & gdy\ x\le 0,\\ \frac{x}{x-1}, & gdy\ 0<x<1,\\ x^2-2, & gdy\ x\ge 1;\end{cases}$

d) $f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}, & gdy\ x\in(-1;0)\cup(0;+\infty),\\ \frac{1}{2}, & gdy\ x=0;\end{cases}$

e) $f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{x^2+11}-6}{x-5}, & gdy\ x\ne 5,\\ 3, & gdy\ x=5;\end{cases}$

f) $f(x)=\begin{cases}\frac{x+3}{x^2+x-6}, & gdy\ x\in R-\{-3,2\},\\ -\frac{1}{5}, & gdy\ x=-3\vee x=2;\end{cases}$

g) $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-4x+3}{x-1}, & gdy\ x\in R-\{1\},\\ 2, & gdy\ x=1;\end{cases}$

h) $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-2x}{2x-4}, & gdy\ x\ne 2,\\ 2, & gdy\ x=2.\end{cases}$

Zad. 3. Wyznaczyć asymptoty wykresów następujących funkcji:

a) $f(x)=\frac{x^3-2}{x^2-x-2}$, **b)** $f(x)=\frac{x^2-3x}{x^2-4}$, **c)** $f(x)=\frac{x}{1-x^2}$, **d)** $f(x)=\frac{1-x^2}{1+x}$, **e)** $f(x)=\frac{3x-2}{(x-2)^2}$,

f) $f(x)=\frac{x^2}{x+3}$, **g)** $f(x)=\frac{2x^3-x}{x^2-1}$, **h)** $f(x)=\frac{5x^2-1}{x}$, **i)** $f(x)=\frac{1-3x^2}{x}$, **j)** $f(x)=\frac{x^2-5}{x-2}$.

ĆWICZENIA NR 4 Z MATEMATYKI (Finanse i Rachunkowość, studia zaoczne, I rok)

Zad. 1. Korzystając z definicji pochodnej funkcji w punkcie, wyznaczyć wzór na pochodną funkcji f, jeśli: **a)** $f(x)=\sqrt{x}$, **b)** $f(x)=\frac{1}{x}$.

Zad. 2. Wyznaczyć, korzystając z odpowiednich wzorów, pochodne funkcji:

a) $f(x)=2x^4+3x^3-5x^2+4x-1$, **b)** $f(x)=9x^2-\sqrt[3]{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{3}{x^2}+4$, **c)** $f(x)=3x^2+4\sqrt{x}+\sin x+\cos x$,

d) $f(x)=2x^3\cos x$, **e)** $f(x)=2e^x\sin x$, **f)** $f(x)=(x^2+1)\ln x$, **g)** $f(x)=\frac{e^x}{1+x^2}$, **h)** $f(x)=\frac{\ln x}{x^5}$,

i) $f(x)=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$, **j)** $f(x)=\frac{1+x^2}{2-x}$, **k)** $f(x)=\sqrt{x^2-4}$, **l)** $f(x)=e^{x^2}$ **ł)** $f(x)=(\ln x)^4$,

m) $f(x)=\ln(x^5)$, **n)** $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)$, **o)** $f(x)=(x^2+1)^5$, **p)** $f(x)=\sin(x^2+3)$,

r) $f(x)=\cos(x^3)$, **s)** $f(x)=4x\sqrt{x^2-1}$, **t)** $f(x)=3x^2e^{-2x}$, **u)** $f(x)=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$, **w)** $f(x)=\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4$,

z) $f(x)=\sqrt[3]{(x^3+1)^2}$.

Zad. 3. Wyznaczyć równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie o odciętej x_0, jeśli:

a) $f(x)=x-\frac{1}{x}$, $x_0=2$, **b)** $f(x)=\frac{2}{x}$, $x_0=2$.

Zad. 4. Wyznaczyć równanie stycznej do wykresu funkcji f, równoległej do prostej k, jeśli:

a) $f(x)=\frac{1}{2}x^2$, $k: y=2x-3$, **b)** $f(x)=\frac{1}{4}x^2$, $k: y=-2x$, **c)** $f(x)=2x^2$, $k: y=4x$.

Zad. 5. Wyznaczyć równanie stycznej do wykresu funkcji f, nachylonej do osi OX pod kątem α, jeśli:

a) $f(x)=x^2+\frac{3}{4}$, $\alpha=45^\circ$, **b)** $f(x)=\frac{1}{2}x^2$, $\alpha=\pi/4$, **c)** $f(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}x^2$, $\alpha=60^\circ$.

ĆWICZENIA NR 5 Z MATEMATYKI (Finanse i Rachunkowość, studia zaoczne, I rok)

Zad. 1. Wyznaczyć granice funkcji, korzystając z reguły de L'Hospitala:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}$, **b)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x}$, **c)** $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x^2}$, **d)** $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln\left(1+e^x\right)}{x}$, **e)** $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{e^{1/x}-1}{\frac{1}{x}}$, **f)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{3x^2}$,

g) $\lim\limits_{x\to \pi/2}\frac{\cos 3x}{\cos x}$, **h)** $\lim\limits_{x\to +\infty} xe^{-x}$, **i)** $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x$, **j)** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{\ln(2x-1)}$, **k)** $\lim\limits_{x\to 15}\frac{x-15}{\sqrt{x+1}-4}$, **l)** $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-8x+15}{x^2-7x+12}$.

Zad. 2. Wyznaczyć przedziały monotoniczności i ekstrema lokalne funkcji f, jeśli:

a) $f(x)=-9x^5+15x^3$, **b)** $f(x)=x+\frac{1}{x}$, **c)** $f(x)=3x^5-5x^3$, **d)** $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$, **e)** $f(x)=\frac{x}{1-x^2}$.

Zad. 3. Wyznaczyć ekstrema globalne (największą i najmniejszą wartość) funkcji f w przedziale A, jeśli:

a) $f(x)=3x-x^3$, $A=\langle 0,4\rangle$, **b)** $f(x)=x^3-3x^2-24x$, $A=\langle 0,6\rangle$, **c)** $f(x)=-x^4+2x^2+5$, $A=\langle -2,2\rangle$.

Zad. 4. Wyznaczyć przedziały wypukłości i wklęsłości oraz punkty przegięcia wykresu funkcji f, jeśli:

a) $f(x)=x^3-4x^2-2x+1$, **b)** $f(x)=x^4-1{,}5x^2-4x$, **c)** $f(x)=x^2-\frac{1}{x}$.

ĆWICZENIA NR 6 Z MATEMATYKI (Finanse i Rachunkowość, studia zaoczne, I rok)

Zad. 1. Zbadać przebieg zmienności funkcji: **a)** $f(x)=\frac{x^2+2x+1}{2x}$, **b)** $f(x)=\frac{x^2-2}{x-1}$.

Zad. 2. Wyznaczyć całki, korzystając z odpowiednich wzorów:

a) $\int\left(2x^3-3x^2+4x-5+\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}+\frac{4}{x^3}\right)dx$, **b)** $\int\left(5\sqrt[3]{x^2}-4\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{4}{\sqrt[5]{x^3}}\right)dx$.

Zad. 3. Wyznaczyć całki metodą podstawiania:

a) $\int(2x+3)^5\,dx$, **b)** $\int\sqrt{3x+7}\,dx$, **c)** $\int\frac{3x^4}{x^5+1}\,dx$, **d)** $\int\sin(2x-3)dx$, **e)** $\int\frac{x^3}{\left(3-2x^4\right)^5}\,dx$, **f)** $\int xe^{-x^2}\,dx$,

g) $\int\frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx$, **h)** $\int\frac{(\ln x)^2}{x}\,dx$, **i)** $\int\frac{\sqrt[3]{1+\ln x}}{x}\,dx$, **j)** $\int\frac{1}{x(1+\ln x)}\,dx$, **k)** $\int\frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx$.

Zad. 4. Wyznaczyć całki metodą całkowania przez części:

a) $\int x\sin x\,dx$, **b)** $\int x\cos x\,dx$, **c)** $\int xe^x\,dx$, **d)** $\int\ln x\,dx$, **e)** $\int\sqrt{x}\ln x\,dx$.