PLAN 2023/2024.

Uaktualnienie: 16 października 2023

Spis treści

1 Analiza matematyczna **2**

1.1 Szczegółowe zasady zaliczenia przedmiotu 2

1.2 Literatura przedmiotu 4

1.3 PLAN ĆWICZEŃ 4

1.4 ZADANIA 4

1.4.1 Lokaty 4

1.4.2 Granica 6

1.4.3 Ciągłość funkcji 6

1.4.4 Asymptoty 7

1.4.5 Styczna do wykresu 8

1.4.6 Pochodne 9

1.4.7 Reguła de' Hospital'a 9

1.4.8 Ekstrema 10

1.4.9 Przebieg zmienności funkcji 11

1.4.10 Całki nieoznaczone 15

1.4.11 Całki oznaczone 16

1.4.12 Prawdopodobieństwo 18

1.4.13 Ekstrema funkcji dwuargumentowej 19

1.4.14 Całki dwuargumentowe 20

1 Analiza matematyczna

1.1 Szczegółowe zasady zaliczenia przedmiotu

1. SPRAWDZIANY
   (a) W ciągu semestru będą dwa sprawdziany.
      - Sprawdzian 1: zajęcia nr 7
      - Sprawdzian 2: zajęcia nr 14

      Sprawdziany są punktowane i na zakończenie semestru liczy się suma punktów. Z każdego sprawdzianu można uzyskać maksymalnie 4 punkty. Pojedyncze sprawdziany nie będą poprawiane.
   (b) Na zakończenie semestru zostanie wyznaczony wskaźnik ćwiczeniowy w:
   $$w = p_k + 0.2p_a,$$
   gdzie $p_k = \frac{\text{suma punktów ze sprawdzianów}}{8}$, $p_a = \frac{\text{suma punktów za aktywność}}{13}$
2. EGZAMIN WŁAŚCIWY
   (a) Egzamin właściwy składa się z dwóch części. Część praktyczna to kilka zadań z całości materiału, część teoretyczna to kilka pytań pojęciowych. Obie części muszą być zaliczone. Wynik z egzaminu jest wyznaczany według formuły
   $$\text{Wynik} = 0.7p_z + 0.3p_t, \text{o ile } p_t, p_z \geq 0.5$$
   p_z – wynik z części zadaniowej,
   p_z – wynik z części teoretycznej,
   (b) Jeżeli wskaźnik ćwiczeniowy w studenta wynosi co najmniej 0.7, to student ten może zadeklarować, że chce być zwolniony z części praktycznej egzaminu. Wtedy zostanie przyjęte, że
   $$\text{Wynik} = 0.7w + 0.3p_t, \text{o ile } p_t \geq 0.5$$
   (c) Jeżeli $p_z < 0.5$ lub $p_t < 0.5$, to
   $$\text{Wynik} = 0$$
3. EGZAMIN POPRAWKOWY

(a) Egzamin poprawkowy składa się z dwóch części. Część praktyczna to kilka zadań z całości materiału, część teoretyczna to kilka pytań pojęciowych. Obie części muszą być zaliczone. Z żadnej części student nie będzie zwolniony.

(b) Ocena końcowa wystawiana jest wyłącznie na podstawie wyniku z egzaminu poprawkowego:

$$\text{Wynik} = \begin{cases} 0.7p_z + 0.3p_t & \text{, o ile } p_t, p_z \geq 0.5 \\ 0 & \text{, w przeciwnym przypadku} \end{cases}.$$

4. OCENA KOŃCOWA Z EGZAMINU

Wynik	ocena
$\langle 0, 0.5)$	2.0
$\langle 0.5, 0.6)$	3.0
$\langle 0.6, 0.7)$	3.5
$\langle 0.7, 0.8)$	4.0
$\langle 0.8, 0.9)$	4.5
co najmniej 0.9	5.0

5. TERMINY EGZAMINÓW

(a) Data egzaminu właściwego: 25.01.2023 (Czwartek)

(b) Data egzaminu poprawkowego: 05.02.2023 (Poniedziałek)

1.2 Literatura przedmiotu

a) Mangatiana A. Robdera, A concise approach to mathematical analysis, Springer-Verlag London 2003, DOI 10.1007/978-0-85729-347-3
b) Banaś J., Podstawy matematyki dla ekonomistów, Warszawa 2019, PWN
c) Banaś J., Wedrychowicz S., Zbiór zadań z analizy matematycznej, Warszawa 2019, PWN
d) Krych M., Analiza matematyczna dla ekonomistów, Warszawa 2010, WUW 5.Krysicki W., Włodarski L., Analiza matematyczna w zadaniach (część I), Warszawa 2019, PWN

1.3 PLAN ĆWICZEŃ

1. Granica, ciągłość, kapitalizacja ciągła,
2. Asymptoty, Styczna
3. Pochodne, ekstrema – wstęp
4. Ekstrema
5. Przebieg zmienności
6. Całki nieoznaczone - wstęp
7. Sprawdzian
8. Całki nieoznaczone
9. Całki oznaczone
10. Prawdopodobieństwo
11. Ekstrema dwuargumentowe
12. Ekstrema dwuargumentowe
13. Całki dwuargumentowe po obszarach normalnych (opcjonalnie)
14. Sprawdzian
15. Powtórzenie+uzupełnienia

1.4 ZADANIA

1.4.1 Lokaty

Zadanie 1.
Kapitał 100 tys. zł. złożono na pięć lat przy oprocentowaniu rocznym 5% bez kapitalizacji odsetek. Ile wyniesie kapitał po pięciu latach?

Zadanie 2.
Kapitał 100 tys. zł. złożono na pięć lat przy oprocentowaniu rocznym 5% z kapitalizacją odsetek co rok. Ile wniesie kapitał po pięciu latach?

Zadanie 3.
Kapitał 200 tys. zł. złożono na pięć lat przy oprocentowaniu rocznym 5% z kapitalizacją odsetek co kwartał. Ile wniesie kapitał po pięciu latach?

$$K_{4\cdot 5} = 200\left(1 + \frac{5}{4\cdot 100}\right)^{4\cdot 5}$$

Ile wynosi efektywny czynnik oprocentowujący?

$$\left(1 + \frac{5}{4\cdot 100}\right)^{4}$$

Do czego służy efektywny czynnik oprocentowujący, który można wyznaczać przy różnych formach kapitalizacji? *Czynnik ten pozwala porównać warunki oszczędzania w różnych bankach.*
Porównaj efektywny czynnik w tym zadaniu z takimi samymi czynnikami z dwóch poprzednich zadań.

Zadanie 4.
Kapitał 100 tys. zł. złożono na pięć lat przy oprocentowaniu rocznym 5% z ciągłą kapitalizacją odsetek. Ile wniesie kapitał po pięciu latach?

Zadanie 5.
Na dwa lata zakładamy lokatę w wysokości 2000 PLN. Roczna stopa oprocentowania wynosi 4%. Odsetki naliczane są co miesiąc. Jakie będzie zysk z lokaty, jeżeli odsetki nie są kapitalizowane.

Zadanie 6.
Na dwa lata zakładamy lokatę w wysokości 2000 PLN. Roczna stopa oprocentowania wynosi 4%. Odsetki naliczane są co miesiąc. Jakie będzie zysk z lokaty, jeżeli odsetki są kapitalizowane.

Zadanie 7.
Do jakiej kwoty wzrośnie kapitał w wysokości K, złożony na A lat, jeżeli roczna stopa procentowa wynosi $p\%$, a odsetki kapitalizowane są b-krotnie w ciągu roku.

Zadanie 8.
Beata założyła w banku roczną lokatę (na procent składany) w wysokości K. Oprocentowanie roczne tej lokaty jest stałe i wynosi $p\%$. Kapitalizacja odsetek odbywa się co kwartał. Bank pobiera od każdych naliczonych odsetek $r\%$ podatku od dochodów kapitałowych. Obliczyć, jaką kwotą będzie dysponować Beata po roku.

Zadanie 9.
W banku został zaciągnięty kredyt w wysokości K PLN na x lat. Roczna stopa oprocentowania kredytu wynosi $p\%$ i jest stała. Raty kredytu ma być spłacana co miesiąc w równych ratach. Każda rata składa się z części kapitałowej i części odsetkowej. Wyznaczyć część kapitałową oraz część odsetkową każdej z rat.

1.4.2 Granica

Zadanie 10.
Wyznaczyć granice: 1. $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x^3+3x-1}{x^2-2x+3}$, 2. $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x^2+3x+2}{x+2}$, 3. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-1}{x^3-1}$, 4. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^4-16}{x-2}$, 5. $\lim\limits_{x\to 9} \frac{x^2-81}{\sqrt{x}-3}$, 6. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1}\right)$, 7. $\lim\limits_{x\to 3^+} \frac{-x}{3-x}$

1.4.3 Ciągłość funkcji

Zadanie 11.
Zbadać ciągłość funkcji

1. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+x-2}{x^2-1} & \text{dla } x \in R \setminus \{-1,1\} \\ 1 & \text{dla } x = -1 \\ -1 & \text{dla } x = 1 \end{cases}$

2. $f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x \le 0 \\ \dfrac{x}{x-1} & \text{dla } 0 < x < 1 \\ x^2-2 & \text{dla } x \ge 1 \end{cases}$

3. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2+11}-6}{x-5} & \text{dla } x \ne 5 \\ 3 & \text{dla } x = 5 \end{cases}$

4. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4x+3}{x-1} & \text{dla } x \in R \setminus \{-1\} \\ 2 & \text{dla } x = 1 \end{cases}$

5. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{x^2+x-2} & \text{dla } \in R \setminus \{-2,1\} \\ 1/3 & \text{dla } x \in \{-2,1\} \end{cases}$

6. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x} & \text{dla } x \in (-1,0) \cup (0,\infty) \\ 1/2 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$

7. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+3}{x^2+x-6} & \text{dla } x \in R \setminus \{-3,2\} \\ -1/5 & \text{dla } x \in \{-3,2\} \end{cases}$

8. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-2x}{2x-4} & \text{dla } x \neq 2 \\ 2 & \text{dla } x = 2 \end{cases}$

1.4.4 Asymptoty

Zadanie 12.
Wyznaczyć dziedzinę naturalną oraz asymptoty funkcji: 1. $f(x) = \frac{x^2-3}{x-2}$, 2. $f(x) = x - \frac{4}{x^3}$, 3. $f(x) = \frac{2x^2-5x+2}{3x^2-10x+3}$

Zadanie 13.
Wyznaczyć asymptoty wykresów funkcji 1. $f(x) = \frac{x^3-2}{x^2-x-2}$, 2. $f(x) = \frac{x^2-3x}{x^2-4}$, 3. $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$, 4. $f(x) = \frac{1-x^2}{1+x}$, 5. $f(x) = \frac{3x-2}{(x-2)^2}$, 6. $f(x) = \frac{x^2}{x+3}$, 7. $f(x) = \frac{2x^3-x}{x^2-1}$, 8. $f(x) = \frac{5x^2-1}{x}$, 9. $f(x) = \frac{1-3x^2}{x}$, 10. $f(x) = \frac{x^2-5}{x-2}$,

Zadanie 14.
(Funkcja Törnquista I rodzaju) Zależność popytu na dobra pierwszej potrzeby od dochodu:

$$T_1(x) = \frac{ax}{x+b}, \text{ dla } x \geq 0,$$

gdzie $a, b > 0$.
Wyznaczyć asymptoty tej funkcji. Naszkicować wykres funkcji T_1.

Zadanie 15.
(Funkcja Törnquista II rodzaju) Zależność popytu na dobra wyższego rzędu od dochodu:

$$T_2(x) = \begin{cases} 0, & \text{dla } 0 < x < d \\ \frac{a(x-d)}{x+b}, & \text{dla } x \geq d \end{cases},$$

gdzie $a, d, b > 0$.
Wyznaczyć asymptoty tej funkcji. Naszkicować wykres funkcji T_2.

Zadanie 16.
(Funkcja Törnquista II rodzaju) Zależność popytu na dobra luksusowe od dochodu:

$$T_3(x) = \begin{cases} 0, & \text{dla } 0 < x < g \\ \frac{kx(x-g)}{x+h}, & \text{dla } x \geq g \end{cases},$$

gdzie $k, g, h > 0$.
Wyznaczyć asymptoty tej funkcji. Naszkicować wykres funkcji T_3.

1.4.5 Styczna do wykresu

Zadanie 17.
Wyznaczyć równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie o odciętej x_0 , jeśli

a) $f(x) = x - 1/x,\ x_0 = 2,$
b) $f(x) = 2/x,\ x_0 = 2.$

Zadanie 18.
Wyznaczyć równanie stycznej do wykresu funkcji f , równoległej do prostej k , jeśli:

a) $f(x) = \frac{1}{2}x^2,\ k : y = 2x - 3,$
b) $f(x) = \frac{1}{4}x^2,\ k : y = -2x,$
c) $f(x) = 2x^2,\ k : y = 4x.$

Zadanie 19.
Wyznaczyć równanie stycznej do wykresu funkcji f , nachylonej do osi OX pod kątem α, jeśli:

a) $f(x) = x^2 + \frac{3}{4},\ \alpha = 45°,$

b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2,\ \alpha = \pi/4,$

c) $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}x^2,\ \alpha = 60^\circ$

1.4.6 Pochodne

Zadanie 20.
Wyznaczyć pochodną funkcji

$$f(x) = 3x^8 + \sqrt{x} + \frac{5}{x^2}$$

Zadanie 21.
Wyznaczyć pochodną funkcji

$$f(x) = 5x^2\sqrt{2x+1}$$

Zadanie 22.
Obliczyć pochodne następujących funkcji

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^4 + \frac{13}{5}x^5 - 2x^6; \quad f(x) = 5x^{15} - x^2 + \frac{1}{3}x - 2$$

$$f(x) = \frac{4}{x^4}; \quad f(x) = \frac{3}{(1-x^2)(1-2x^3)}$$

$$f(x) = \frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{2x}}; \quad f(x) = (1-4x^2-5x+12)^5$$

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[3]{x}}; \quad f(x) = \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}}$$

$$f(x) = \sin(4x^3+3x-2); \quad f(x) = \tan(\ln(x))$$

$$f(x) = \arcsin\frac{1}{x}; \quad f(x) = \arctan\frac{1+x}{1-x}$$

$$f(x) = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1); \quad f(x) = \frac{1}{5}x^5\arctan x - \frac{1}{10}\ln(1+x^2)$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{1-\arcsin x}{1+\arcsin x}}; \quad f(x) = (x+5\sqrt{1-x^2})e^{5\arcsin x}$$

$$f(x) = \log_x a; \quad f(x) = \log_x \ln x$$

1.4.7 Reguła de' Hospital'a

Zadanie 23.
Wyznaczyć granice funkcji, korzystając z reguły de L'Hospitala

a) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1}$,
b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x}$,
c) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{\ln x}{x^2}$,
d) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x}$,
e) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{e^{1/x}-1}{1/x}$,
f) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{3x^2}$,
g) $\lim\limits_{x\to \pi/2} \frac{\cos 3x}{\cos x}$,
h) $\lim\limits_{x\to \infty} xe{-}x$,
i) $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x$,
j) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-1}{\ln(2x-1)}$,
k) $\lim\limits_{x\to 15} \frac{x-15}{\sqrt{x+1}-4}$,
l) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-8x+15}{x^2-7x+12}$.

1.4.8 Ekstrema

Zadanie 24.
Wyznaczyć przedziały monotoniczności i ekstrema lokalne funkcji f:

a) $f(x) = -9x^5 + 15x^3$,
b) $f(x) = x + 1/x$,
c) $f(x) = 3x^5 - 5x^3$,
d) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$,
e) $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$.

Zadanie 25.
Wyznaczyć ekstrema globalne (największą i najmniejszą wartość) funkcji f w przedziale A:

a) $f(x) = 3x - x^3,\ A = \langle 0, 4\rangle$,
b) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x,\ A = \langle 0, 6\rangle$,

c) $f(x) = -x^4 + 2x^2 + 5,\ A = \langle -2, 2\rangle$.

Zadanie 26.
Wyznaczyć przedziały wypukłości i wklęsłości oraz punkty przegięcia wykresu funkcji f:

a) $f(x) = x^3 + 4x^2 - 2x + 1$,
b) $f(x) = x^4 - 1.5x^2 - 4x$,
c) $f(x) = x^2 - \frac{1}{x}$.

1.4.9 Przebieg zmienności funkcji

Przykład 1. (przebieg zmienności funkcji)
Zbadam przebieg zmienności funkcji

$$f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$$

1. Wyznaczam naturalną dziedzinę funkcji. Dziedzinę tę oznaczę przez D. Ponieważ $1 + x^2 > 0$ dla każdego $x \in R$, dziedziną funkcji jest zbiór liczb rzeczywistych. Zatem $D = R$. Ponieważ funkcja f jest ciągła w swojej dziedzinie, nie będzie miała asymptot pionowych.
2. Sprawdzam, czy funkcja ma asymptoty poziome

$$\text{Ponieważ } \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{1+x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{1/x + x} = 0,$$

   funkcja f ma asymptotę poziomą o równaniu $y = 0$.
3. Monotoniczność funkcji zbadam za pomocą jej pochodnej

$$f'(x) = \frac{2(1+x^3) - 2x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = 2 \cdot \frac{(1-x)(1+x)}{(1+x^2)^2}$$

   Zauważmy, że skoro $(1+x^2)^2 > 0$, to

$$f'(x) > 0 \iff (1-x)(1+x) > 0 \iff x \in (-1, 1)$$

   Zatem funkcja f:

   (a) jest rosnąca w przedziale $(-1, 1)$ (pochodna jest dodatnia)
   (b) jest malejąca w przedziałach $(-\infty, -1)$, $(1, \infty)$ (pochodna jest ujemna)

(c) ma minimum lokalne w $x = -1$ (w $x = -1$ pochodna zmienia znak z ujemnego na dodatni)
(d) ma maksimum lokalne w $x = 1$ (w $x = 1$ pochodna zmienia znak z dodatniego na ujemny)

4. Wypukłość (wklęsłość) funkcji f zbadam za pomocą jej drugiej pochodnej

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(2 \cdot \frac{(1-x)(1+x)}{(1+x^2)^2}\right)' = 2\left(\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\right)' \\ &= 2\left(\frac{-2x(1+x^2)^2 - (1-x^2)2(1+x^2)2x}{(1+x^2)^4}\right) \\ &= \frac{4x(x-\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}{(1+x^2)^3} \end{aligned}$$

Zatem

$$f''(x) > 0 \iff 4x(x-\sqrt{3})(x-\sqrt{3}) > 0 \iff x \in (-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, \infty)$$

Na tej podstawie wnioskuję, że:

(a) funkcja f jest wypukła w przedziałach $(-\sqrt{3}, 0), (\sqrt{3}, \infty)$ (ponieważ druga pochodna jest dodatnia w tych przedziałach)
(b) funkcja f jest wklęsła w przedziałach $(-\infty, -\sqrt{3}), (0, \sqrt{3})$ (ponieważ druga pochodna jest ujemna w tych przedziałach)
(c) Wykres funkcji f ma punkty przegięcia dla argumentów funkcji ze zbioru $\{-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}\}$ (ponieważ druga pochodna zmienia znak w tych argumentach)

5. Wykres funkcji zostanie naszkicowany na podstawie *tabelki przebiegu zmienności funkcji.*

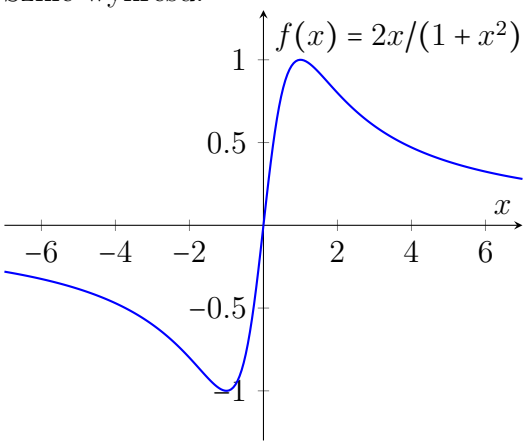
Tablelka przebiegu zmienności funkcji dla $x \leq 0$

x	$-\infty$	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3}, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0
$f'(x)$	x	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$f''(x)$	x	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0

Tablelka przebiegu zmienności funkcji dla $x > 0$

x	$(0,1)$	1	$(1,\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3},\infty)$	∞
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	x
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	x
$f(x)$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	0

Szkic wykresu:



Uwagi końcowe:

- Funkcja ma maksimum w $x = 1$. Wartość maksymalna funkcji wynosi $f(1) = 1$;
- Funkcja ma minimum w $x = -1$. Wartość minimalna funkcji wynosi $f(-1) = -1$;
- Punktami przegięcia wykresu funkcji f są następujące punkty należące do R^2: $(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}/2)$, $(0,0)$, $(\sqrt{3}, \sqrt{3}/2)$. Proszę zwrócić uwagę na to, że są to punkty postaci $(x, f(x))$.
- Funkcja $f(x)$ jest nieparzysta, ponieważ

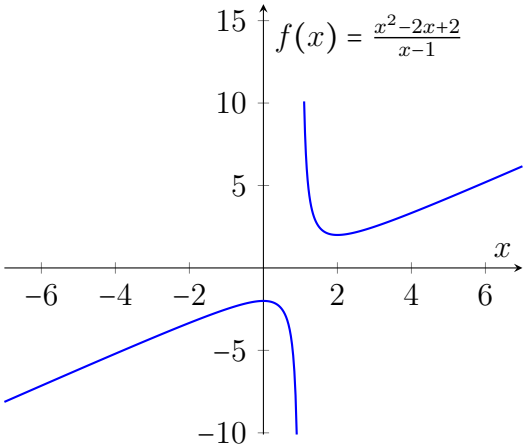
$$\forall x \in R \quad f(-x) = -f(x)$$

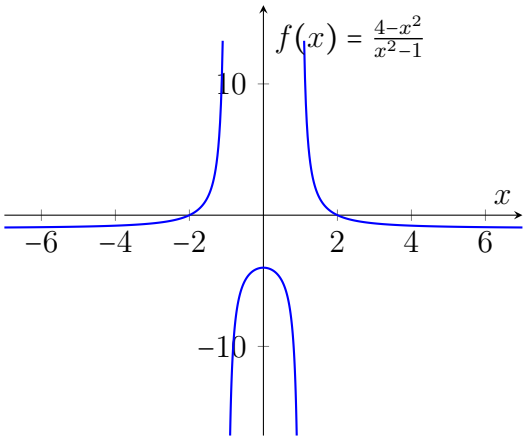
Zadanie 27.

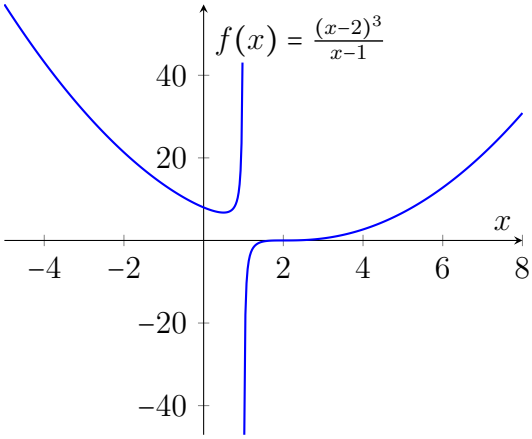
Zbadać przebieg zmienności funkcji i narysować jej wykres

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$$
$$f(x) = \frac{4 - x^2}{x^2 - 1}$$
$$f(x) = \frac{(x-2)^3}{x - 1}$$

Poniżej znajdują się wykresy odpowiednich funkcji. Wykresy te mają posłużyć do sprawdzenia przeprowadzonych analiz.







1.4.10 Całki nieoznaczone

Zadanie 28.
Wyznaczyć całki

a) $\int 2x^3 - 3x^2 + 4x - 5 + \frac{2}{x} - \frac{5}{x^2} + \frac{4}{x^3}\, dx$,
b) $\int 5\sqrt[3]{x^2} - 4\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{4}{\sqrt[5]{x^3}}\, dx$.

Zadanie 29.
Wyznaczyć całki metodą podstawiania:

a) $\int (2x+3)^5\, dx$,
b) $\int \sqrt{3x+7}\, dx$,
c) $\int \frac{3x^4}{x^5+1}\, dx$,
d) $\int \sin(2x-3)\, dx$,
e) $\int \frac{x^3}{(3-2x^4)^5}\, dx$,
f) $\int xe^{-x^2}\, dx$,
g) $\int \frac{1}{x(\ln x)^2}\, dx$,
h) $\int \frac{(\ln x)^2}{x}\, dx$,
i) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\ln x}}{x}\, dx$,
j) $\int \frac{1}{x(1+\ln x)}\, dx$,
k) $\int \frac{e^{1/x}}{x^2}\, dx$.

Zadanie 30.

Wyznaczyć całki metodą całkowania przez części:

a) $\int x \sin x \, dx$,
b) $\int x \cos x \, dx$,
c) $\int x e^x \, dx$,
d) $\int \ln x \, dx$,
e) $\int \sqrt{x} \ln x \, dx$.

Zadanie 31.
Znajdź funkcję $F(x)$ spełniającą równanie $F'(x) = e^{-2x}$ i warunek $F(0) = 3$.

Zadanie 32.
Znajdź funkcję $F(x)$ spełniającą równanie $F'(x) = \cos 2x$ i warunek $F(\pi/12) = 0.5$.

1.4.11 Całki oznaczone

Zadanie 33.
Obliczyć całki:

a) $\int_1^e \frac{4}{x} \, dx$,
b) $\int_2^3 (x^2 + 1) \, dx$,
c) $\int_0^2 (4x^3 + 6x^2 - 2x + 3) \, dx$,
d) $\int_0^1 \frac{x-1}{x+1} \, dx$,
e) $\int_2^3 \frac{1}{x^2-1} \, dx$,
f) $\int_1^e \frac{x+1}{x^2} \, dx$,
g) $\int_{-1}^0 (6x + 5) \, dx$,
h) $\int_{-3}^3 e^{-|x|} \, dx$,
i) $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx$
j) $\int_0^1 e^{-x} \, dx$.

Zadanie 34.
Wyznaczyć funkcję

a) $F(x) = \int_0^x \sin t \, dt$ dla $x \in \langle 0, \pi \rangle$,
b) $F(x) = \int_1^x \ln t \, dt$ dla $x \in \langle 1, e \rangle$.

Zadanie 35.
Wyznaczyć funkcję $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ dla $x \in \langle 0, 3\rangle$, gdzie

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in \langle 0, 2) \\ x & \text{dla } x \in \langle 2, 3\rangle \end{cases}$$

Zadanie 36.
Wyznaczyć funkcję $F(x) = \int_{-1}^x f(t)\,dt$ dla $x \in \langle -1, 1\rangle$, gdzie

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{dla } x \in \langle -1, 0) \\ 1 & \text{dla } x \in \langle 0, 1\rangle \end{cases}$$

Zadanie 37.
Obliczyć całkę $\int_0^2 f(x)\,dx$, gdzie

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x \in \langle 0, 1\rangle \\ x^2 & \text{dla} x \in (1, 2\rangle \end{cases}$$

Zadanie 38.
Obliczyć pole ograniczone łukiem paraboli $y^2 = 2x$ oraz prostą $x = 8$

Zadanie 39.
Obliczyć pole zawarte pomiędzy parabolami $y^2 = x$, $x^2 = 8y$.

Zadanie 40.
Obliczyć pole zawarte pomiędzy liniami $y = x^3$, $y^2 = x$.

Zadanie 41.
Obliczyć pole obszaru ograniczonego łukami paraboli $y^2 = x$ i okręgu $x^2 + y^2 - 4x = 0$.

Zadanie 42.
Obliczyć pole zawarte pomiędzy hiperbolą $xy = 4$ a prostą $x + y = 5$.

Zadanie 43.
Obliczyć całki:

a) $\int_3^5 \frac{x}{x^2-4}\,dx$,
b) $\int_{-3}^{-2} \frac{1}{x^2+2x+1}\,dx$,
c) $\int_{-1}^{0} \frac{3}{4x^2+4x-3}\,dx$,
d) $\int_1^2 \frac{x^2+1}{\sqrt[3]{x^3+3x+1}}\,dx$,
e) $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$, $a>0$,
f) $\int_0^2 \frac{e^{2x}}{1+e^x}\,dx$,
g) $\int_1^2 x(x^2+1)e^{x^2}\,dx$,
h) $\int_0^6 \frac{x}{4+x^4}\,dx$.

1.4.12 Prawdopodobieństwo

Zadanie 44.
Zysk w pewnej populacji gospodarstw ma rozkład określony funkcją gęstości

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{18}x & \text{dla } 0 \le x \le 6, \\ 0 & \text{dla } x \notin \langle 0, 6\rangle. \end{cases}$$

a) Jaki jest odsetek gospodarstw o zysku większym niż 3?
b) Jaki jest prawdopodobieństwo wylosowania gospodarstwa o zysku między 2.5 a 4?
c) Wyznaczyć dystrybuantę zysku w populacji.

Zadanie 45.
Z pracy do domu możemy dojechać autobusem linii 666. Czas dojazdu autobusem do domu wynosi 15 minut. Autobusy z przystanku odjeżdżają co piętnaście minut. Zakładamy, że przychodzimy na przystanek autobusowy w losowym momencie. Wyznaczyć rozkład czasu dojazdu do domu.

a) Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że będziemy z pracy do domu jechać dłużej niż 20 minut?
b) Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że będziemy z pracy do domu jechać co najmniej 18 minut ale nie dłużej niż 25 minut?
c) Wyznaczyć dystrybuantę czasu dojazdu z pracy do domu.

Zadanie 46.
Czas życia w pewnej populacji jest zmienną losową o rozkładzie określonym

funkcją gęstości

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq 0, \\ \frac{k}{\lambda}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{(k-1)} \exp\left[-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k\right] & \text{dla } x > 0. \end{cases}$$

gdzie k oraz λ są dodatnimi stałymi.

a) Jaki jest odsetek populacji osób żyjących dłużej niż x_1?
b) Jaki jest odsetek populacji osób, które dożyją x_2?
c) Wyznaczyć dystrybuantę czasu życia.

1.4.13 Ekstrema funkcji dwuargumentowej

Zadanie 47.
Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji

a) $f(x,y) = x^2 + xy + 2x + y^2$
b) $f(x,y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$
c) $f(x,y) = y^3 - 3xy^2 + 6xy - 3x^2 - 15y + 15x$
d) $f(x,y) = x^2 - 6xy + y^3 + 3x + 6y$
e) $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$
f) $f(x,y) = xy + 1/x + 8/y$
g) $f(x,y) = (6 - x - y)x^2y^3$

Zadanie 48.
Użyteczność koszyka złożonego z dwóch towarów w ilościach x_1 oraz x_2 wyraża się wzorem

$$u(x_1, x_2) = x_1^{0.6} x_2^{0.4}$$

Wyznaczyć koszyk o najwyższej użyteczności, jeżeli ceny jednostkowe towarów wynoszą odpowiednio 2 oraz 3, a budżet wynosi 10.

Zadanie 49.
Użyteczność koszyka złożonego z dwóch towarów w ilościach x_1 oraz x_2 wyraża się wzorem

$$u(x_1, x_2) = x_1^{0.6} x_2^{0.4}$$

Ceny jednostkowe towarów wynoszą odpowiednio 2 oraz 3. Wyznaczyć najtańszy koszyk o takiej samej użyteczności jak koszyk złożony z $x_1 = 5$ oraz $x_2 = 3$.

Zadanie 50.
Prostopadłościenny magazyn ma mieć objętość $V = 216m^3$. Do budowy ścian magazynu używane są płyty w cenie 30 PLN/m^2, do budowy podłogi w cenie 40 PLN/m^2 a sufitu w cenie 20 PLN/m^2. Znaleźć długość a, szerokość b i wysokość c magazynu, którego koszt budowy będzie najmniejszy.

1.4.14 Całki dwuargumentowe

Zadanie 51.
Wyznaczyć całki:

1. $\int_1^2 \int_0^3 (x + y^2 x)\, dxdy$
2. $\int_{-1}^1 \int_2^4 (x^2 + y^2 x)\, dxdy$
3. $\int_3^5 \int_2^4 \ln(x + y)\, dxdy$
4. $\int_D (x^2 - xy)\, dxdy, \quad \text{dla } D = \{(x, y) \in R^2 : \ y \geq x, \ y \leq 3x - x^2\}$
5. $\int_D (3x - 2y)\, dxdy, \quad \text{dla } D = \{(x, y) \in R^2 : \ x^2 + y^2 \leq 1\}$
6. $\int_D (xy)\, dxdy, \quad \text{dla } D = \{(x, y) \in R^2 : \ y \leq 6 - x, \ y \geq \sqrt{x}, \ x \geq 0\}$