STATYSTYKA MATEMATYCZNA

Stanisław Jaworski
SGGW, KEiS

Ostatnia modyfikacja: 17 stycznia 2023, Warszawa

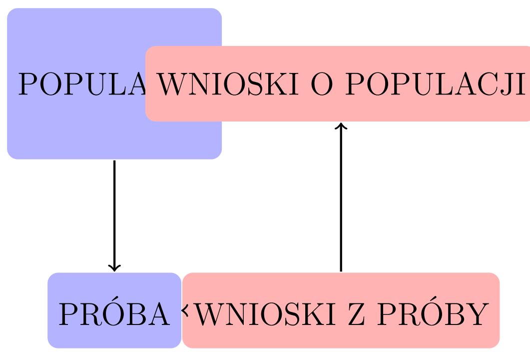
TEMATYKA WYKŁADÓW

Spis treści

1 Podstawy

1.1 Główna idea

Wnioskowanie statystyczne polega na wnioskowaniu o populacji na podstawie próby



Populacja
Zbiór obiektów z wyróżnioną cechą (cechami). *Obiektami mogą być przedmioty lub wartości cechy*

Próba
Wybrana część populacji podlegająca badaniu. *Próba powinna stanowić reprezentację populacji w tym sensie, że częstości występowania w próbie każdej z badanych cech nie powinny się znacznie różnić od częstości występowania tych cech w populacji.*

Cecha
Wielkość losowa charakteryzująca obiekty danej populacji

2 Model statystyczny

2.1 Model dwumianowy

Doświadczenie Bernoulliego

Doświadczenie Bernoulliego
Wykonujemy dwuwynikowe doświadczenie. Wyniki nazywane są umownie *SUKCES* oraz *PORAŻKA*. Prawdopodobieństwo sukcesu wynosi θ (porażki: $1-\theta$)

Zmienna losowa
Zmienną losową X jest wynik doświadczenia, a dokładniej

$$X = \begin{cases} 1 & \text{gdy wynik jest SUKCESEM} \\ 0 & \text{gdy wynik jest PORAŻKĄ} \end{cases}$$

Schemat Bernoulliego

Schemat Bernoulliego
Doświadczenie Bernoulliego wykonujemy n krotnie w sposób niezależny. Zmienną losową X jest liczba sukcesów.

Rozkład dwumianowy
Zmienna losowa X ma rozkład $B(n,\theta)$:

$$P_{n,\theta}(X=k) = \binom{n}{k}\theta^k(1-\theta)^{n-k}, \quad 0<\theta<1,\ k=0,1,\ldots,n.$$

Przykład
Wadliwość procesu produkcyjnego wynosi 10%. Obliczyć prawdopodobieństwo, że na dziesięć wylosowanych produktów będą co najwyżej dwa złe.

Rozwiązanie
Doświadczenie Bernoulliego: wylosowanie jednego produktu.
Sukces: produkt wadliwy
Porażka: produkt dobry

Prawdopodobieństwo sukcesu: 0.1
Prawdopodobieństwo porażki: 0.9

Rozwiązanie
Schemat Bernoulliego: wylosowanie dziesięciu produktów

$X-$liczba wadliwych produktów wśród dziesięciu wylosowanych produktów.

Prawdopodobieństwo wylosowania co najwyżej dwóch złych:

$$P_{10,0.1}(X \leq 2) = P_{10,0.1}(X = 0) + P_{10,0.1}(X = 1) + P_{10,0.1}(X = 2)$$

Przykład
Nie znamy wadliwości procesu produkcyjnego. Losujemy dziesięć produktów i zliczamy liczbę złych produktów.

Model statystyczny
$X-$liczba wadliwych produktów wśród dziesięciu produktów wylosowanych.

$\mathcal{X} = \{0, 1, \ldots, 10\}$ - wszystkie możliwe realizacje zmiennej losowej X

$\Theta = (0, 1)$ - wszystkie możliwe wartości parametru θ (prawdopodobieństwa sukcesu)

Model statystyczny $(\mathcal{X}, \{P_{10,\theta} : \ \theta \in \Theta\})$

- $\mathcal{X}$ – przestrzeń próby
- Θ – przestrzeń parametrów
- $\{P_{10,\theta} : \ \theta \in \Theta\}$ – rodzina rozkładów (*w tym przypadku jest to rodzina rozkładów dwumianowych*)

Przykład
Wiemy, że wadliwość procesu produkcyjnego może wynosić albo 0.1 albo 0.2. Losujemy dziesięć produktów i zliczamy liczbę złych produktów.

Model statystyczny
$X-$liczba wadliwych produktów wśród dziesięciu produktów wylosowanych.

$\mathcal{X} = \{0, 1, \ldots, 10\}$ - wszystkie możliwe realizacje zmiennej losowej X

$\Theta = \{0.1, 0.2\}$ - wszystkie możliwe wartości parametru θ (prawdopodobieństwa sukcesu)

Model statystyczny

$$(\mathcal{X}, \{P_{10,\theta} : \ \theta \in \Theta\})$$

2.2 Model gaussowski

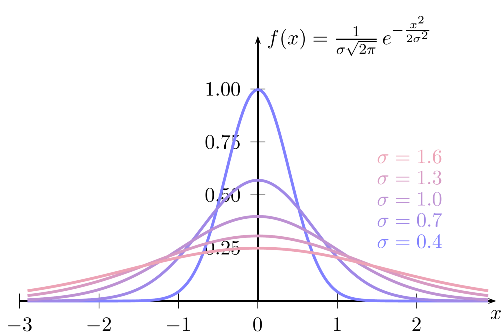
Rozkład normalny

Zmienna losowa o rozkładzie normalnym

Zmienna losowa X ma rozkład normalny $N(\mu, \sigma^2)$:

$$f_{\mu,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \cdot \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right\}, \quad -\infty < x < \infty)$$

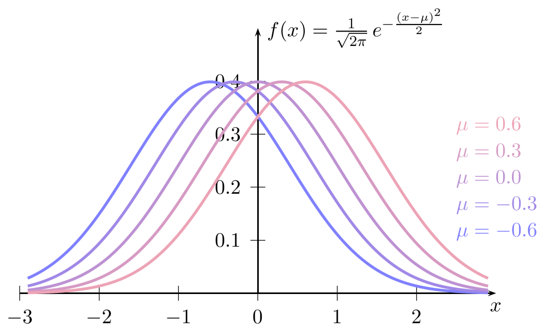
$$E_{\mu,\sigma^2}X = \mu, \quad D^2_{\mu,\sigma^2}X = \sigma^2$$



Prawo trzech sigm

$$P\{|X-\mu| < \sigma\} = 0.68268 \approx 0.68 \tag{1}$$
$$P\{|X-\mu| < 2\sigma\} = 0.95550 \approx 0.96 \tag{2}$$
$$P\{|X-\mu| < 3\sigma\} = 0.99730 \approx 0.997 \tag{3}$$

Przykład



Załóżmy, że waga(w kilogramach) wylosowanego noworodka jest zmienną losową o rozkładzie normalnym. Jak określić model statystyczny dla doświadczenia polegającego na wylosowaniu i zważeniu noworodka?

Rozwiązanie

- X – waga wylosowanego noworodka
- Założenie: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$
- $\mathcal{X} = (-\infty, \infty)$
- $\theta = (\mu, \sigma^2)$ – parametr dwuwymiarowy
- $\Theta = R \times R^+$ – przestrzeń parametrów

Model statystyczny

$$(\mathcal{X}, \{f_{\mu,\sigma^2} : \ (\mu, \sigma^2) \in \Theta\})$$

Zwróćmy uwagę na to, że model jest „za szeroki”. Chcielibyśmy, aby: $\mathcal{X} = (0, \infty)$ oraz $\Theta = R^+ \times R^+$?

2.3 Model wykładniczy

Rozkład wykładniczy

Zmienna losowa o rozkładzie wykładniczym

Zmienna losowa X ma rozkład wykładniczy $E(\lambda)$:

$$f_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda} \exp\left\{-\frac{x}{\lambda}\right\} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x), \quad x \in R$$

Przykład
Załóżmy, że czas losowej rozmowy telefonicznej jest zmienną losową o rozkładzie wykładniczym. Jak określić model statystyczny dla doświadczenia polegającego na wylosowaniu rozmowy i określeniu czasu jej trwania?

Rozwiązanie

- X – czas trwania wylosowanej rozmowy
- Założenie: $X \sim E(\lambda)$
- $\mathcal{X} = (0, \infty)$

Model statystyczny

$$(\mathcal{X}, \{f_\lambda : \lambda \in R^+\})$$

3 Estymatory punktowe

3.1 Estymatory Nieobciążone

Model statystyczny $(\mathcal{X}, \{P_\theta : \theta \in \Theta\})$
Niech $g : \Theta \to \mathbb{R}$
Zadanie: oszacować nieznaną wartość $g(\theta)$

Estymator wielkości $g(\theta)$
Wybrać takie $\delta(X_1, \ldots. X_n)$, aby dla każdego $\theta \in \Theta$

$$E_\theta \delta(X_1, \ldots. X_n) = \theta$$

$$E_\theta(\delta(X_1, \ldots. X_n) - g(\theta))^2 = \min!$$

Model dwupunktowy: estymacja parametru θ

Model statystyczny dla próby $X_1, X_2, \dots X_n$ z rozkładu dwupunktowego $D(\theta)$:

$$\big(\{0,1\}^n, \{P_\theta : \ \theta \in \langle 0,1 \rangle\}\big),$$

gdzie $P_\theta(x_1,\ x_2, \dots,\ x_n) = \theta^{\sum_{i=1}^n x_i}(1-\theta)^{n-\sum_{i=1}^n x_i}$, dla $\theta \in (0,1)$.

Zmienna losowa X_i przyjjmuje wartość 1, gdy wynik $i-$tego doświadczenia Bernoulliego kończy się SUKCESEM oraz wartość 0 w przeciwnym przypadku. Stąd rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej X_i ma postać

$$P_\theta(x_i) = \begin{cases} \theta & \text{dla } x_i = 1 \\ 1-\theta & \text{dla } x_i = 0 \end{cases} = \theta^{x_i}(1-\theta)^{1-x_i}.$$

Z niezależności zmiennych losowych wynika, że rozkład prawdopodobieństwa wektora $(X_1,\ X_2, \dots,\ X_n)$ ma postać:

$$P_\theta(x_1,\ x_2, \dots,\ x_n) = \prod_{i=1}^n P_\theta(x_i) = \theta^{\sum_{i=1}^n x_i}(1-\theta)^{n-\sum_{i=1}^n x_i}$$

Model dwumianowy: estymacja parametru θ

Niech $X_1, X_2, \dots X_n$ będzie próbą z rozkładu dwupunktowego $D(\theta)$. Model statystyczny dla $T = \sum_{i=1}^n X_i$ ma postać:

$$\big(\{0,1,\dots,n\}, \{P_\theta : \ \theta \in \langle 0,1 \rangle\}\big),$$

gdzie $P_\theta(t) = \binom{n}{t}\theta^t(1-\theta)^{n-t}$, dla $t \in \{0,1,\dots,n\}$ oraz $\theta \in (0,1)$.

- $E_\theta T = n\theta$, dla każdego $\theta \in \langle 0,1 \rangle$
- $D^2 T = n\theta(1-\theta)$, dla każdego $\theta \in \langle 0,1 \rangle$

Wniosek: Zmienna losowa $T/n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ jest estymatorem nieobciążonym parametru θ. Wariancja tego estymatora wynosi $\frac{\theta(1-\theta)}{n}$.

Model dwumianowy: estymacja parametru $g(\theta) = \theta(1-\theta)$

Niech $X_1,\ X_2, \dots,\ X_n$ będzie próbą z rozkładu dwupunktowego $D(\theta)$. Niech

$$T = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i.$$

Estymatorem nieobciążonym parametru $g(\theta)$ jest

$$\hat{g}(T) = \frac{T(n-T)}{n(n-1)}.$$

Szukamy takiej funkcji $\hat{g} : \{0, 1, \ldots, n\} \to \langle 0, 0.25\rangle$, dla której zachodzi:

$$E_\theta \hat{g}(T) = \theta(1-\theta), \text{dla każdego } \theta \in \langle 0, 1\rangle.$$

$$E_\theta \hat{g}(T) = \sum_{t=0}^{n} \hat{g}(t) \binom{n}{t} \theta^t (1-\theta)^{n-t} = \theta(1-\theta)$$

$$(1-\theta)^n \sum_{t=0}^{n} \hat{g}(t) \binom{n}{t} \left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^t = \theta(1-\theta)$$

$$\sum_{t=0}^{n} \hat{g}(t) \binom{n}{t} \left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^t = \left(\frac{\theta}{1-\theta}\right) \left(1 + \left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)\right)^{n-2}$$

Podstawienie: $v = \theta/(1-\theta)$

$$\sum_{t=0}^{n} \hat{g}(t) \binom{n}{t} v^t = v\,(1+v)^{n-2}$$

$$\sum_{t=0}^{n} \hat{g}(t) \binom{n}{t} v^t = \sum_{t=0}^{n-2} \binom{n-2}{t} v^{t+1}$$

Postać funkcji $\hat{g}$ wynika z warunków:

$$\hat{g}(0)\binom{n}{0} = 0 = g(n)\binom{n}{n} \text{ oraz } \hat{g}(t)\binom{n}{t} = \binom{n-2}{t-1}, \; t = 1, 2, \ldots, n-1$$

Model Poissona: Estymacja $P_\theta(X = 0) = e^{-\theta}$

Niech $X_1,\ X_2, \ldots,\ X_n$ będzie próbą z rozkładu Poissona z parametrem θ. Oznaczmy

- $Y_j = \begin{cases} 1, & \text{jeżeli } X_j = 0, \\ 0, & \text{jeżeli } X_j > 0. \end{cases}$, dla $j = 1, 2, \ldots, n$

- $T = \sum_{j=1}^{n} Y_j$

Estymatorami nieobciążonymi parametru $g(\theta) = e^{-\theta}$ są:

- Y_1,
- T/n,
- $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^T$.

$E_\theta(Y_1) = 1 \cdot P_\theta(Y_1 = 1) + 0 \cdot P_\theta(Y_1 = 0) = P_\theta(X_1 = 0) = e^{-\theta}$
Analogicznie $E_\theta(Y_j) = e^{-\theta}$ dla $j = 2, \ldots, n$
Zatem $E_\theta(T/n) = \frac{1}{n} E_\theta(T) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E_\theta(Y_j) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} e^{-\theta} = e^{-\theta}$

Ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite:

$$E_\theta(E_\theta(Y_1|T)) = E_\theta(Y_1) = e^{-\theta}$$

Zatem $E_\theta(Y_1|T)$ jest estymatorem nieobciążonym parametru $e^{-\theta}$. Można pokazać, że $E_\theta(Y_1|T) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^T$.

$$\begin{aligned}
E_\theta\left(Y_1|T = t\right) &= P_\theta\{X_1 = 0|T = t\} = \frac{P_\theta\{X_1 = 0, T = t\}}{P_\theta(T = t)} \\
&= \frac{\sum\limits_{x_2 + \cdots + x_n = t} P_\theta\{X_1 = 0, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n\}}{P_\theta(T = t)} \\
&= \frac{\sum\limits_{x_2 + \cdots + x_n = t} P_\theta\{X_1 = 0\} P_\theta\{X_2 = x_2\} \ldots P_\theta\{X_n = x_n\}}{P_\theta(T = t)} \\
&= \frac{\sum\limits_{x_2 + \cdots + x_n = t} e^{-\theta} \cdot \frac{\theta^{x_2}}{x_2!} e^{-\theta} \cdot \ldots \cdot \frac{\theta^{x_n}}{x_n!} e^{-\theta}}{P_\theta(T = t)} \\
&= \frac{\sum\limits_{x_2 + \cdots + x_n = t} e^{-\theta n} \cdot \frac{\theta^t}{x_2! \ldots x_n!}}{P_\theta(T = t)} = \frac{e^{-\theta n} \cdot \theta^t \cdot \sum\limits_{x_2 + \cdots + x_n = t} \frac{1}{x_2! \ldots x_n!}}{P_\theta(T = t)} \\
&= \frac{\frac{e^{-\theta n} \cdot \theta^t}{t!} \cdot (n-1)^t}{P_\theta(T = t)}
\end{aligned}$$

Skorzystałem ze wzoru $\sum_{k_1+\cdots+k_m=t} \frac{t!}{k_1!\ldots k_m!} a_1^{k_1} \ldots a_m^{k_m} = (a_1 + \ldots + a_m)^t$ Wystarczy teraz zauważyć, że $T = \sum_{i=1}^n X_1$ ma rozkład Poissona z parametrem $n\theta$. Zatem podstawiamy

$$P_\theta(T = t) = \frac{(n\theta)^t}{t!} e^{-n\theta}$$

i po uproszczeniach algebraicznych otrzymujemy

$$E_\theta(Y_1|T = t) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^t.$$

Podsumowanie

Model	Parametr	ENMW(Paramer)
Dwumianowy	θ	T/n
	$\theta(1-\theta)$	$\frac{T(n-T)}{n(n-1)}$
Poisona	$e^{-\theta}$	$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^T$

Uwaga: $T = \sum_i X_i$

Estymatory nieobciążone o minimalnej wariancji - przykład

Model gaussowski: estymacja parametrów

Niech

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

$$S^2 = \begin{cases} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2, & \mu \text{ jest znane,} \\ \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2, & \mu \text{ nie jest znane.} \end{cases}$$

Estymatory nieobciążone o minimalnej wariancji - przykład

Model gaussowski: estymacja parametrów

Zmienna losowa $\bar{X}$ ma rozkład $N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

Zmienna losowa S^2/σ^2 ma rozkład chi–kwadrat z ν stopniami swobody:

$$\nu = \begin{cases} n, & \mu \text{ jest znane}, \\ n-1, & \mu \text{ nie jest znane}. \end{cases}$$

Estymatory nieobciążone o minimalnej wariancji - przykład

Model gaussowski: estymacja parametrów

$$E_{\mu,\sigma} S^\alpha = \begin{cases} \dfrac{\sigma^\alpha}{K_{\nu,\alpha}}, & \nu + \alpha > 0, \\ \infty, & \nu + \alpha \leq 0, \end{cases}$$

gdzie $K_{\nu,\alpha} = \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) / \left(2^{\frac{\alpha}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu+\alpha}{2}\right)\right)$

Estymatory nieobciążone o minimalnej wariancji - przykład

Model gaussowski: estymacja parametrów

Jeżeli μ oraz σ nie są znane, to

- $ENMW[\mu] = \bar{X}$
- $ENMW[\sigma^2] = \frac{1}{n-1} S^2$
- $ENMW[\sigma] = \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\sqrt{2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} S$
- $ENMW\left[\frac{\mu}{\sigma}\right] = \frac{\sqrt{2}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)} \frac{\bar{X}}{S}$

3.2 Estymatory Największej Wiarogodności

ENW: przykład wstępny

Wykonano 50 rzutów nieznaną monetą i otrzymano 32 orły.

Jakie jest prawdopodobieństwo wyrzucenia orła w pojedynczym rzucie?

ENW: przykład wstępny

Model statystyczny rzutów monetą

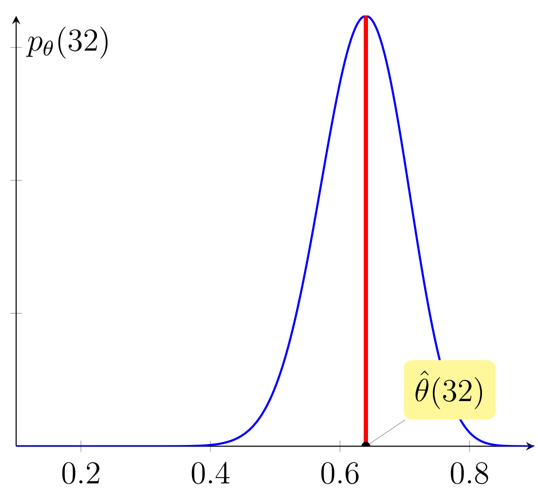
$$(\{0,1,\ldots,50\},\{Bin\,(50,\theta)\,,\ \theta\in[0,1]\})$$

Prawdopodobieństwo uzyskania 32 orłów w 50 rzutach

$$p_\theta(32)=\binom{50}{32}\theta^{32}(1-\theta)^{50-32}$$

Dla jakiego θ uzyskanie 32 orłów jest najbardziej prawdopodobne?

ENW: przykład wstępny



ENW: przykład wstępny

Zasada wiarogodności
Wybrać tę wartość parametru θ, dla której uzyskanie 32 orłów w 50 rzutach jest najbardziej prawdopodobne

tzn. wartość θ maksymalizującą $p_\theta(32)$

Estymatory największej wiarogodności

Wiarogodność
Model statystyczny $(\mathcal{X}, \mathcal{B}, \{P_\theta,\ \theta \in \Theta\})$
Dla ustalonego $x \in \mathcal{X}$ wielkość

$$L(\theta; x) = p_\theta(x)$$

nazywamy wiarogodnością parametru θ.

Estymatory największej wiarogodności

Estymator Największej Wiarogodności
Jeżeli przy każdym ustalonym $x \in \mathcal{X}$ istnieje $\hat{\theta} = \hat{\theta}(x) \in \Theta$ takie, że

$$L(\hat{\theta}; x) \geq L(\theta; x) \quad (\forall \theta \in \Theta),$$

to odwzorowanie $\hat{\theta} : \mathcal{X} \to \Theta$ nazywamy estymatorem największej wiarogodności.

Estymatory największej wiarogodności

Twierdzenie
Jeżeli $h : \Theta \to \Theta$ jest funkcją różnowartościową oraz $\hat{\theta}$ jest $ENW[\theta]$, to $h(\hat{\theta})$ jest $ENW[h(\theta)]$.

ENW funkcji parametrycznej
Jeżeli $h : \Theta \to \Theta$, to $ENW[h(\theta)]$ określamy jako $h(\hat{\theta})$, gdzie $\hat{\theta}$ jest $ENW[\theta]$.

Estymator Największej Wiarogodności - przykład

Model dwupunktowy: $ENW[\theta]$
Zaobserwowano $X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n$.
Wiarogodność parametru θ:

$$L(\theta; x_1, \ldots, x_n) = \theta^t (1-\theta)^{n-t}, \quad \text{gdzie } t = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Znaleźć $\hat{\theta}$ maksymalizujące wiarogodność (t jest ustalone)

Estymator Największej Wiarogodności - przykład

Model dwupunktowy: $ENW[\theta]$
$\hat{\theta}$ jest rozwiązaniem równania

$$\frac{dL(\theta; x_1, \ldots, x_n)}{d\theta} = 0$$

Estymator Największej Wiarogodności - przykład

Model dwupunktowy: $ENW[\theta]$
Zamiast $L(\theta; x_1, \ldots, x_n) = \theta^t (1-\theta)^{n-t}$ łatwiej

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\theta; x_1, \ldots, x_n) &= \log L(\theta; x_1, \ldots, x_n) \\ &= t \log \theta + (n-t) \log(1-\theta) \end{aligned}$$

Estymator Największej Wiarogodności - przykład

Model dwupunktowy: $ENW[\theta]$
Mamy

$$\frac{d\mathcal{L}}{d\theta} = \frac{t}{\theta} - \frac{n-t}{1-\theta} = 0$$

$$ENW[\theta] = \frac{T}{n}$$

Estymator Największej Wiarogodności - przykład

Model dwupunktowy: $ENW[\theta(1-\theta)]$

$$ENW[\theta(1-\theta)] = \hat{\theta}(1-\hat{\theta})$$

gdzie

$$\hat{\theta} = ENW[\theta]$$

3.2.1 Model Poissona

Estymator Największej Wiarogodności - przykład

Model Poissona: $ENW[\theta]$
Zaobserwowano $X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n$.
Wiarogodność parametru θ:

$$L(\theta; x_1, \ldots, x_n) = \frac{(n\theta)^t}{x_1! \cdots x_n!} e^{-(n\theta)}, \qquad \text{gdzie } t = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Znaleźć $\hat{\theta}$ maksymalizujące wiarogodność (t jest ustalone)

Estymator Największej Wiarogodności - przykład

Model Poissona: $ENW[\theta]$
$\hat{\theta}$ jest rozwiązaniem równania

$$\frac{dL(\theta; x_1, \ldots, x_n)}{d\theta} = 0$$

Estymator Największej Wiarogodności - przykład

Model Poissona: $ENW[\theta]$
Zamiast $L(\theta; x_1, \ldots, x_n) = \frac{(n\theta)^t}{x_1! \cdots x_n!} e^{-(n\theta)}$ łatwiej

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\theta; x_1, \ldots, x_n) &= \log L(\theta; x_1, \ldots, x_n) \\ &= t \log n + t \log \theta - \sum_{i=1}^{n} \log(x_i!) - n\theta \end{aligned}$$

Estymator Największej Wiarogodności - przykład

Model Poissona: $ENW[\theta]$
Mamy

$$\frac{d\mathcal{L}}{d\theta} = \frac{t}{\theta} - n = 0$$

$$ENW[\theta] = \frac{T}{n}$$

Estymator Największej Wiarogodności - przykład

Model Poissona: $ENW[\lambda = e^{-\theta}]$

$$ENW[\lambda] = e^{-\tilde{\theta}} (\overset{\texttt{ozn}}{=} \tilde{\lambda})$$

gdzie

$$\tilde{\theta} = ENW[\theta]$$

Estymator Największej Wiarogodności - przykład

Model Poissona: $ENW[\lambda]$ **vs** $ENMW[\lambda]$
Ryzyko $\tilde{\lambda} = ENW[\lambda]$

$$R_{\tilde{\lambda}}(\lambda) = E_\theta(\tilde{\lambda} - \lambda)^2 = E_\theta\tilde{\lambda}^2 - 2\lambda E_\theta\tilde{\lambda} + \lambda^2$$

Ryzyko $\hat{\lambda} = ENMW[\lambda]$

$$R_{\hat{\lambda}}(\lambda) = E_\theta(\hat{\lambda} - \lambda)^2 = D_\theta^2\hat{\lambda}^2$$

Estymator Największej Wiarogodności - przykład

Model Poissona: $R_{\tilde{\lambda}}(\lambda)$

$$\begin{aligned} E_\theta\tilde{\lambda}^2 &= \sum_{t=0}^{\infty} \left(e^{-\frac{t}{n}}\right)^2 \frac{(n\theta)^t}{t!} e^{-n\theta} = e^{-n\theta} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(n\theta e^{-\frac{2}{n}})^t}{t!} \\ &= \exp\left\{-n\theta\left(1 - e^{-\frac{2}{n}}\right)\right\} = \lambda^{n(1-e^{-\frac{2}{n}})} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_\theta\tilde{\lambda} &= \sum_{t=0}^{\infty} e^{-\frac{t}{n}} \frac{(n\theta)^t}{t!} e^{-n\theta} = e^{-n\theta} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(n\theta e^{-\frac{1}{n}})^t}{t!} \\ &= \exp\left\{-n\theta\left(1 - e^{-\frac{1}{n}}\right)\right\} = \lambda^{n(1-e^{-\frac{1}{n}})} \end{aligned}$$

Estymator Największej Wiarogodności - przykład

Model Poissona: $R_{\tilde{\lambda}}(\lambda)$

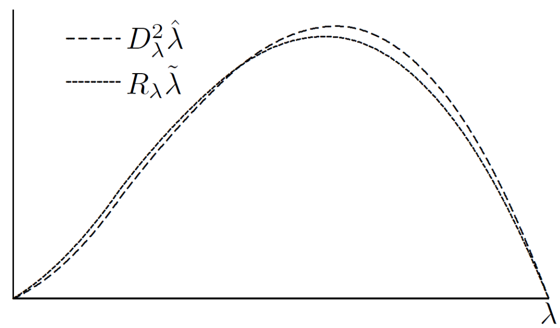
$$R_{\tilde{\lambda}}(\lambda) = \lambda^{n(1-e^{-\frac{2}{n}})} - 2\lambda^{1+n(1-e^{-\frac{1}{n}})} + \lambda^2$$

Model Poissona: $R_{\hat{\lambda}}(\lambda)$

$$R_{\hat{\lambda}}(\lambda) = D_\lambda^2\hat{\lambda} = \lambda^{\left(2-\frac{1}{n}\right)} - \lambda^2$$

Estymator Największej Wiarogodności - przykład

Model Poissona: $R_{\tilde{\lambda}}(\lambda)$ **vs** $R_{\hat{\lambda}}(\lambda)$



3.2.2 Model gaussowski

Estymator Największej Wiarogodności - przykład

Model gaussowski: $ENW[\mu]$ **i** $ENW[\sigma^2]$
Zaobserwowano $X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n$.
Wiarogodność parametru (μ, σ^2):

$$L(\mu, \sigma^2; x_1, \ldots, x_n) = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)^2\right\}$$

Znaleźć $\hat{\mu}$ i $\hat{\sigma^2}$ maksymalizujące wiarogodność

Estymator Największej Wiarogodności - przykład

Model gaussowski:$ENW[\mu]$ **i** $ENW[\sigma^2]$
$(\hat{\mu}, \hat{\sigma^2})$ jest rozwiązaniem równania

$$\begin{cases} \frac{\partial L(\mu,\sigma^2;x_1,\ldots,x_n)}{\partial \mu} = 0 \\ \frac{\partial L(\mu,\sigma^2;x_1,\ldots,x_n)}{\partial \sigma^2} = 0 \end{cases}$$

Estymator Największej Wiarogodności - przykład

Model gaussowski: $ENW[\mu]$ **i** $ENW[\sigma^2]$
Zamiast $L(\theta; x_1, \ldots, x_n)$ łatwiej

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\mu, \sigma^2; x_1, \ldots, x_n) &= \log L(\mu, \sigma^2; x_1, \ldots, x_n) \\ &= -n \log \sqrt{2\pi} - \frac{n}{2} \log \sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2\end{aligned}$$

Estymator Największej Wiarogodności - przykład

Model gaussowski: $ENW[\mu]$ **i** $ENW[\sigma^2]$
Mamy

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu} = -\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu) = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2} \frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 = 0 \end{cases}$$

Estymator Największej Wiarogodności - przykład

Model gaussowski: $ENW[\mu]$ **i** $ENW[\sigma^2]$
Otrzymujemy

$$ENW[\mu] = \bar{X}$$

$$ENW[\sigma^2] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X}\right)^2$$

Estymator Największej Wiarogodności - przykład

Model gaussowski: estymacja wariancji
Niech $c > 0$ oraz

$$S^2(c) = c \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X}\right)^2$$

Ryzyko estymatora $S^2(c)$:

$$R_{\mu,\sigma^2} \left(c \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X}\right)^2 \right)$$

Dla jakiego c ryzyko jest jednostajnie najmniejsze?

Estymator Największej Wiarogodności - przykład

Model gaussowski: estymacja wariancji

$$
\begin{aligned}
&R_{\mu,\sigma^2}\left(c\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2\right)\\
&=E_{\mu,\sigma^2}\left[c\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2-\sigma^2\right]^2\\
&=\sigma^4\left[c^2(n^2-1)-2c(n-1)+1\right]
\end{aligned}
$$

Estymator Największej Wiarogodności - przykład

Model gaussowski: estymacja wariancji

$$R_{\mu,\sigma^2}(ENMW[\sigma^2])=\frac{2}{n-1}\sigma^4$$

$$R_{\mu,\sigma^2}(ENW[\sigma^2])=\frac{2n-1}{n^2}\sigma^4$$

Estymator o jednostajnie najmniejszym ryzyku

$$\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2$$

4 Estymacja przedziałowa

Estymacja przedziałowa

Przedział ufności (estymator przedziałowy)

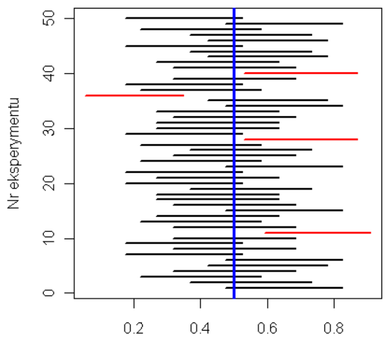
Przedział ufności (estymator przedziałowy) jest przedziałem o końcach zależnych od próby, który z pewnym z góry zadanym prawdopodobieństwem $1-\alpha$ pokrywa nieznaną wartość parametru θ:

$$P\{\theta\in(\underline{\theta}(X_1,\ldots,X_n),\overline{\theta}(X_1,\ldots,X_n))\}\geq 1-\alpha\quad(\forall\theta).$$

Poziom ufności jest to ustalone prawdopodobieństwo $1-\alpha$.

Ilustracja estymacji przedziałowej parametru θ (oznaczonego pionową niebieską linią) na poziomie ufności $1-\alpha$

Populacja z wyróżnioną cechą X



Przedział ufności dla średniej μ w rozkładzie normalnym $N(\mu, \sigma^2)$

Wariancja σ^2 jest nieznana

Poziom ufności: $1 - \alpha$

Przedział ufności

$$(\bar{X} - t(\alpha; n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t(\alpha; n-1)\frac{S}{\sqrt{n}})$$

gdzie $t(\alpha; n-1)$ jest wartością krytyczną rozkładu t–Studenta o $n-1$ stopniach swobody.

	$t(\gamma;\nu)$			
	γ			
ν	0.1	0.05	0.025	0.01
8	1.8595	2.3060	2.7515	3.3554
9	1.8331	2.2622	2.6850	3.2498
10	1.8125	2.2281	2.6338	3.1690

Przykład
Na podstawie próby 1.1, 1.2, 0.8, 0.9, 1.2, 1.3, 1.0, 0.7, 0.8, 1.0 oszacować wartość średnią μ rozkładu obserwowanej cechy $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, na poziomie ufności $1 - \alpha = 0.95$.

Wniosek. Średnia wartość cechy jest jakąś liczbą z przedziału $(0.86, 1.14)$. Zaufanie do tego wniosku wynosi 95%.

$$\bar{x} = \frac{1.1 + 1.2 + \cdots + 1.0}{10} = 1.0$$

$$\sum (x_i - \bar{x})^2 = (1.1 - 1.0)^2 + \cdots + (1.0 - 1.0)^2 = 0.36$$

$$s^2 = \frac{0.36}{10 - 1} = 0.04,\ \ s = \sqrt{s^2} = 0.2,\ \ t(0.05; 9) = 2.2622$$

$$t(0.05; 9)\frac{s}{\sqrt{n}} = 2.2622\frac{0.2}{\sqrt{10}} = 0.14$$

$$(1 - 0.14, 1 + 0.14) = (0.86, 1.14)$$

Przedział ufności dla wariancji w rozkładzie normalnym

Średnia μ jest nieznana

Poziom ufności: $1 - \alpha$

$$\left(\frac{\sum\limits_i (X_i - \bar{X})^2}{\chi^2(\frac{\alpha}{2}; n - 1)}, \frac{\sum\limits_i (X_i - \bar{X})^2}{\chi^2(1 - \frac{\alpha}{2}; n - 1)} \right)$$

$\chi^2(\alpha; \nu)$ jest stablicowaną wartością krytyczną rozkładu chi–kwadrat z ν stopniami swobody.

ν	Wartości krytyczne $\chi^2(\alpha; r)$			
	α			
	0.975	0.950	0.050	0.025
8	2.1797	2.7326	15.5073	17.5345
9	2.7004	3.3251	16.9190	19.0228
10	3.2470	3.9403	18.3070	20.4832

Przykład
Na podstawie próby 1.1, 1.2, 0.8, 0.9, 1.2, 1.3, 1.0, 0.7, 0.8, 1.0 oszacować zróżnicowanie rozkładu obserwowanej cechy (na poziomie ufności $1-\alpha = 0.95$).

$$\bar{x} = \frac{1.1 + 1.2 + \cdots + 1.0}{10} = 1.0$$

$$\sum_i (x_i - \bar{x})^2 = (1.1 - 1.0)^2 + \cdots + (1.0 - 1.0)^2 = 0.36$$

$$\chi^2(\frac{\alpha}{2}; n-1) = \chi^2(0.025; 9) = 19.0228$$

$$\chi^2(1-\frac{\alpha}{2}; n-1) = \chi^2(0.975; 9) = 2.7004$$

$$\left(\frac{0.36}{19.0228}, \frac{0.36}{2.7004}\right) = (0.019, 0.133)$$

Wniosek. Wariancja cechy jest liczbą z przedziału $(0.019, 0.133)$. Zaufanie do tego wniosku wynosi 95%.

Estymacja prawdopodobieństwa sukcesu
Założenie: $X \sim D(\theta)$
Próba: $X_1,\ X_2, \ldots,\ X_n$
$k = \sum_{i=1}^n X_i$ ($X = 0$ lub $X = 1$)

Przedział ufności dla θ (dokładny)

$$\big(B^{-1}(\alpha/2; k, n-k+1), B^{-1}(1-\alpha/2; k+1, n-k)\big)$$

$B(t; \alpha, \beta)$ jest wartością dystrybuanty zmiennej losowej beta $B(\alpha, \beta)$ o prametrach (α, β), w punkcie $t \in \langle 0, 1\rangle$

$$B(t; \alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\, dx$$

Ryszard Zieliński

Przedział ufności dla frakcji, *Matematyka Stosowana* 10, 2009
https://wojtek.zielinski.statystyka.info/Moj_ojciec/public_html/MS090618_Zielinski.pdf

Estymacja prawdopodobieństwa sukcesu
$\hat{\theta} = k/n$ – oszacowanie punktowe

Przedział przybliżony

$$\left(\hat{\theta} - u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{\theta}(1-\hat{\theta})}{n}}, \hat{\theta} + u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{\theta}(1-\hat{\theta})}{n}}\right)$$

	Kwantyle u_α rozkładu normalnego $N(0,1)$				
α	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006
0.96	1.7744	1.7866	1.7991	1.8119	1.8250
0.97	1.9110	1.9268	1.9431	1.9600	1.9774
0.98	2.0969	2.1201	2.1444	2.1701	2.1973
0.99	2.4089	2.4573	2.5121	2.5758	2.6521

Na przykład $u_{0.975} = 1.96$ Populacja 1, cecha X_1

Populacja 2, cecha X_2

Oznaczenia

Próby: $X_{11}, \ldots, X_{1n_1}; X_{21}, \ldots, X_{2n_2}$

$$\bar{X}_i = \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}, \quad s_i^2 = \frac{\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij} - \bar{X}_i)^2}{n_i - 1}$$

$$s_e^2 = \frac{\sum_{j=1}^{n_1}(X_{1j} - \bar{X}_1)^2 + \sum_{j=1}^{n_2}(X_{2j} - \bar{X}_2)^2}{n_1 + n_2 - 2}, \quad s_r^2 = s_e^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)$$

Ocena różnicy między średnimi $\mu_1 - \mu_2$

Ocena punktowa: $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$

Założenia:

1. $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$
2. X_1, X_2 są niezależne
3. $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

Przedział ufności (poziom ufności $1-\alpha$)

$$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - t(\alpha; n_1 + n_2 - 2)s_r, \bar{X}_1 - \bar{X}_2 + t(\alpha; n_1 + n_2 - 2)s_r)$$

Przykład. Z dwóch populacji pobrano próby: 60, 62, 65, 63, 60 oraz 58, 53, 57, 56, 61. Ocenić różnicę średnich.

$$\bar{x}_1 = 62,\ \sum_{i=1}^{5}(x_{1i} - \bar{x}_1)^2 = 18, \bar{x}_2 = 57,\ \sum_{i=1}^{5}(x_{2i} - \bar{x}_2)^2 = 34$$

$$s_r^2 = \frac{18+34}{5+5-2}\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5}\right) = 2.6$$

$$t(0.05;8) = 2.3060;\ t(0.05;8)s_r = 3.72$$

$$(62 - 57 - 3.72, 62 - 57 + 3.72) = (1.28, 8.72)$$

Wniosek. Różnica średnich jest liczbą z przedziału $(1.28, 8.72)$ **Ocena różnicy frakcji** $p_1 - p_2$

Założenia: $X_1 \sim D(p_1)$, $\quad X_2 \sim D(p_2)$
Cechy X_1, X_2 są niezależne

Próba 1: $X_{11}, X_{12}, \ldots, X_{1n_1}$ ($X_{1i} = 0$ lub 1)
Próba 2: $X_{21}, X_{22}, \ldots, X_{2n_2}$ ($X_{2i} = 0$ lub 1)

$k_1 = \sum_{i=1}^{n_1} X_{1i}$
$k_2 = \sum_{i=1}^{n_2} X_{2i}$

Ocena punktowa: $\hat{p}_1 - \hat{p}_2 = \frac{k_1}{n_1} - \frac{k_2}{n_2}$

Przybliżony przedział ufności (poziom ufności $1 - \alpha$)

$$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 \pm u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}$$

5 Weryfikacja hipotez

5.1 Rodzaje błędów

Weryfikacja hipotez statystycznych

Błąd I rodzaju
Błąd wnioskowania polegający na odrzuceniu hipotezy, gdy w rzeczywistości jest ona prawdziwa.

Błąd II rodzaju
Błąd wnioskowania polegający na nieodrzuceniu hipotezy, gdy w rzeczywistości jest ona fałszywa.

	Decyzja o hipotezie	
Hipoteza	nie odrzucić	odrzucić
prawdziwa	prawidłowa	błędna
fałszywa	błędna	prawidłowa

Błąd I rodzaju kontroluje się przez zadanie małej wartości dla poziomu istotności. **Poziom istotności** jest to górne ograniczenie prawdopodobieństwa popełnienia błędu I rodzaju.

Błędu II rodzaju nie można kontrolować w taki sposób, jak błąd I rodzaju. W praktyce nie wiadomo, ile dokładnie wynosi prawdopodobieństwo popełnienia tego błędu.

5.2 Porównanie z normą

Porównanie średniej z normą

Cecha X ma rozkład normalny $N(\mu, \sigma^2)$
Średnia μ oraz wariancja σ^2 są nieznane

$$H_0: \ \mu = \mu_0$$

Test Studenta (poziom istotności α)

Próba: $X_1, \ldots, X_n$

Statystyka testowa

$$t_{\text{emp}} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S}\sqrt{n} \ .$$

Jeżeli $|t_{\text{emp}}| > t(\alpha; n-1)$, to hipotezę odrzucamy.

Porównanie zróżnicowania z normą

Cecha X ma rozkład normalny $N(\mu, \sigma^2)$
Średnia μ oraz wariancja σ^2 są nieznane

$$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$$

Statystyka chi–kwadrat (poziom istotności α)
Próba: $X_1, \ldots, X_n$

Statystyka testowa $\chi^2_{\text{emp}} = \frac{\sum_i (X_i - \bar{X})^2}{\sigma_0^2}$

Wartości krytyczne $\chi^2(1 - \frac{\alpha}{2}; n-1)$, $\chi^2(\frac{\alpha}{2}; n-1)$

Jeżeli $\chi^2_{\text{emp}} < \chi^2(1 - \frac{\alpha}{2}; n-1)$ lub $\chi^2_{\text{emp}} > \chi^2(\frac{\alpha}{2}; n-1)$ to hipotezę $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ odrzucamy.

Porównanie frakcji z normą

Cecha $X \sim D(p)$
p nie jest znane

$$H_0 : \ p = p_0$$

Statystyka testowa

$$u_{\text{emp}} = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$

Wartość krytyczna: $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$

Jeżeli $|u_{\text{emp}}| > u_{1-\frac{\alpha}{2}}$, to hipotezę odrzucamy.

5.3 Porównanie dwóch populacji

Porównanie średnich

Cecha X_1 ma rozkład normalny $N(\mu_1, \sigma_1^2)$
Cecha X_2 ma rozkład normalny $N(\mu_2, \sigma_2^2)$
Średnia μ_1 oraz wariancja σ_1^2 są nieznane
Średnia μ_2 oraz wariancja σ_2^2 są nieznane
$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$

test t–Studenta

$$t_{\text{emp}} = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{S_r}$$

Wartość krytyczna $t(\alpha; n_1 + n_2 - 2)$
Jeżeli $|t_{\text{emp}}| > t(\alpha; n_1 + n_2 - 2)$, to hipotezę $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ odrzucamy

Porównanie frakcji

Cecha X_1 ma rozkład dwupunktowy $D(p_1)$
Cecha X_2 ma rozkład dwupunktowy $D(p_2)$

$$H_0 : \ p_1 = p_2$$

Statystyka testowa

$$u_{\text{emp}} = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}}$$

gdzie

$$\hat{p}_1 = \frac{k_1}{n_1},\ \hat{p}_2 = \frac{k_2}{n_2},\ \hat{p} = \frac{(k_1 + k_2)}{(n_1 + n_2)}$$

Jeżeli $|u_{\text{emp}}| \geq u_{1-\alpha/2}$, to hipotezę $H_0 : p_1 = p_2$ odrzucamy

5.4 Określenia

Pojęcia

Model statystyczny

$$(\mathcal{X}, \{P_\theta,\ \theta \in \Theta\})$$

Hipoteza statystyczna
Podzbiór Θ_0 zbioru Θ.
Θ_0 nazywamy **hipotezą zerową**
$\Theta_1 = \Theta \setminus \Theta_0$ nazywamy **hipotezą alternatywną**

Pojęcia

Hipoteza prosta
Zbiór Θ_0 jest jednoelementowy

Hipoteza złożona
Zbiór Θ_0 ma więcej niż jeden element

Zapis klasyczny

$$H_0 : \theta \in \Theta_0 \qquad H_1 : \theta \in \Theta_1$$

Pojęcia

Test statystyczny
Procedura statystyczna, w wyniku której podejmujemy jedną z dwóch decyzji:

- *odrzucić hipotezę zerową* H_0
- *nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej* H_0

Pojęcia

Test statystyczny
Test hipotezy H_0 utożsamiamy z funkcją $\phi : \mathcal{X} \to \{0, 1\}$

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{odrzucić } H_0 \\ 0 & \text{nie odrzucać } H_0 \end{cases}$$

Obszar krytyczny

$$\{x \in \mathcal{X} : \phi(x) = 1\}$$

Pojęcia

Zrandomizowany test statystyczny
Funkcja $\phi : \mathcal{X} \to [0, 1]$

$$\phi(x) \begin{cases} = 1 & \text{odrzucić } H_0 \\ \in (0,1) & \text{na podstawie niezależnego od } X \text{ mechanizmu losowego odrzucić } H_0 \text{ z prawdopodobieństwem } \phi(x) \\ = 0 & \text{nie odrzucać } H_0 \end{cases}$$

Pojęcia

Błąd I rodzaju
Błąd polegający na odrzuceniu hipotezy zerowej H_0, gdy w rzeczywistości jest ona prawdziwa.

Poziom istotności
Niech $\alpha \in (0, 1)$. Test ϕ jest na poziomie istotności α, jeżeli

$$E_\theta \phi(X) = P_\theta\{\phi(X) = 1\} \leq \alpha, \ \forall \theta \in \Theta_0$$

Rozmiar testu

$$\sup_{\theta \in \Theta_0} E_\theta \phi(X) = \sup_{\theta \in \Theta_0} P_\theta\{\phi(X) = 1\}$$

Pojęcia

Błąd II rodzaju
Błąd polegający na nieodrzuceniu hipotezy zerowej H_0, gdy w rzeczywistości jest ona fałszywa

Moc testu

$$\Theta_1 \in \theta \to E_\theta \phi(X) = P_\theta\{\phi(X) = 1\}$$

6 Hipotezy proste

6.1 Lemat Neymana–Pearsona

Lemat Neymana–Pearsona

Założenia
Niech P_{θ_0} oraz P_{θ_1} będą rozkładami prawdopodobieństwa o gęstościach f_0 i f_1. Niech $\alpha \in (0,1)$ będzie ustaloną liczbą

Lemat Neymana–Pearsona

Istnienie testu
Istnieją takie stałe t i γ, że

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } f_1(x) > tf_0(x) \\ \gamma, & \text{gdy } f_1(x) = tf_0(x) \\ 0, & \text{gdy } f_1(x) < tf_0(x) \end{cases}$$

jest testem hipotezy $H_0 : \theta = \theta_0$ przeciwko $H_1 : \theta = \theta_1$ na poziomie istotności α, tzn.

$$E_{\theta_0}\phi(X) = \alpha \qquad (*)$$

Lemat Neymana–Pearsona

Dostateczność
Jeżeli test ϕ spełnia warunek $(*)$ i dla pewnego t warunek

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } f_1(x) > tf_0(x) \\ 0, & \text{gdy } f_1(x) < tf_0(x) \end{cases} \qquad (**)$$

to ϕ jest testem najmocniejszym na poziomie istotności α

Konieczność
Jeżeli ϕ jest testem najmocniejszym na poziomie istotności α, to spełnia on warunek $(**)$

6.2 Model dwupunktowy

Hipotezy proste - przykład

Model dwupunktowy: $H_0 : \theta = \theta_0$ **vs** $H_1 : \theta = \theta_1$
Niech $\theta_0 < \theta_1 \in (0,1)$. Model statystyczny

$$\{\{0,1,\ldots,n\},\{B(n,\theta),\theta \in \Theta = \{\theta_0,\theta_1\}\}\}$$

$$H_0 : \theta = \theta_0 \qquad H_1 : \theta = \theta_1$$

$$f_0(x) = \binom{n}{x}\theta_0^x(1-\theta_0)^{n-x}$$
$$f_1(x) = \binom{n}{x}\theta_1^x(1-\theta_1)^{n-x}$$

Hipotezy proste - przykład

Model dwupunktowy: $H_0 : \theta = \theta_0$ **vs** $H_1 : \theta = \theta_1$
Konstrukcja testu $\phi(x)$

$$\phi(x) = 1 \;\Leftrightarrow\; \frac{f_1(x)}{f_0(x)} > t \;\Leftrightarrow\; \left[\frac{\theta_1(1-\theta_0)}{\theta_0(1-\theta_1)}\right]^x > t\left[\frac{1-\theta_0}{1-\theta_1}\right]^n$$

Obszar krytyczny: $\{x > k\}$

Hipotezy proste - przykład

Model dwupunktowy: $H_0 : \theta = \theta_0$ **vs** $H_1 : \theta = \theta_1$
Obszar krytyczny: $\{x > k\}$
Stała k dobrana jest tak, że

$$E_{\theta_0}\phi(X) = P_{\theta_0}\{X > k\} \leq \alpha$$

Hipotezy proste - przykład

Model dwupunktowy: $H_0 : \theta = \theta_0$ **vs** $H_1 : \theta = \theta_1$
Niech $n = 100$, $\theta_0 = 0.05$, $\theta_1 = 0.15$, $\alpha = 0.05$

k	8	9	10	11
$P_{0.05}\{x > k\}$	0.06309	0.02819	0.01147	0.00427

Test niezrandomizowany

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & \text{jeżeli } x > 9, \\ 0, & \text{jeżeli } x \leq 9. \end{cases}$$

Rozmiar testu: $P_{0.05}\{x > 9\} = 0.02819$
Błąd II rodzaju: $P_{0.15}\{x \leq 9\} = 0.05509$

Hipotezy proste - przykład

Model dwupunktowy: $H_0 : \theta = \theta_0$ **vs** $H_1 : \theta = \theta_1$
Niech $n = 100$, $\theta_0 = 0.05$, $\theta_1 = 0.15$, $\alpha = 0.05$

k	8	9	10	11
$P_{0.05}\{x > k\}$	0.06309	0.02819	0.01147	0.00427
$P_{0.05}\{x = k\}$	0.06487	0.03490	0.01672	0.00720

Test zrandomizowany

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & \text{jeżeli } x > 9 \\ 0.62495, & \text{jeżeli } x = 9 \\ 0, & \text{jeżeli } x < 9 \end{cases}$$

Hipotezy proste - przykład

Model dwupunktowy: $H_0 : \theta = \theta_0$ **vs** $H_1 : \theta = \theta_1$
Rozmiar testu zrandomizowanego

$$\begin{aligned} P_{0.05}\{x > 9\} &+ 0.62495 \cdot P_{0.05}\{x = 9\} \\ &= 0.02819 + 0.62495 \cdot 0.03490 = 0.05 \end{aligned}$$

6.3 Jednostajny vs Beta

Hipotezy proste - przykład

$H_0 : U(0,1)$ **vs** $H_1 : B(a,b)$
Niech $a, b > 1$. Model statystyczny

$$\{(0,1), \{U(0,1), B(a,b)\}\}$$

$$H_0 : U(0,1) \text{ vs } H_1 : B(a,b)$$

$$\begin{aligned} f_0(x) &= 1 \cdot \mathbf{1}_{(0,1)}(x) \\ f_1(x) &\propto x^{a-1}(1-x)^{b-1}\mathbf{1}_{(0,1)}(x) \end{aligned}$$

Hipotezy proste - przykład

$H_0 : U(0,1)$ **vs** $H_1 : B(a,b)$

$$\phi(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{f_1(x)}{f_0(x)} > t \Leftrightarrow x^{a-1}(1-x)^{b-1} > t$$

Obszar krytyczny: $\{x_0 < x < x_1\}$

Liczby x_0, x_1 dobrane są tak, że

$$E_{\theta_0}\phi(X) = P_{U(0,1)}\{x_0 < X < x_1\} \leq \alpha$$

Hipotezy proste - przykład

$H_0 : U(0,1)$ **vs** $H_1 : B(a,b)$

$$x_0^{a-1}(1-x_0)^{b-1} = x_1^{a-1}(1-x_1)^{b-1}$$

Ponieważ $x_1 = x_0 + \alpha$, więc

$$\left[\frac{x_0+\alpha}{x_0}\right]^{a-1}\left[\frac{1-x_0-\alpha}{1-x_0}\right]^{b-1} = 1$$

Hipotezy proste - przykład

$H_0 : U(0,1)$ **vs** $H_1 : B(a,b)$

a	b	x_0	x_1
2	2	0.47500	0.52500
2	3	0.30865	0.35865
2	4	0.22556	0.27556
3	2	0.64135	0.69135
3	3	0.47500	0.52500
3	4	0.37517	0.42517
4	2	0.72444	0.77444
4	3	0.57483	0.62483
4	4	0.47500	0.52500

7 Hipotezy złożone

7.1 Iloraz wiarogodności

Hipotezy złożone

Problem

$$(\mathcal{X}, \{P_\theta,\ \theta \in \Theta\})$$

$$H_0 : \theta \in \Theta_0 \text{ vs } H_1 : \theta \in \Theta_1$$

H_0 i/lub H_1 złożone

Hipotezy złożone

Iloraz wiarogodności (1)

$$\lambda(x) = \frac{\sup\limits_{\theta \in \Theta_1} f_\theta(x)}{\sup\limits_{\theta \in \Theta_0} f_\theta(x)}$$

Iloraz wiarogodności (2)

$$\lambda(x) = \frac{\sup\limits_{\theta \in \Theta} f_\theta(x)}{\sup\limits_{\theta \in \Theta_0} f_\theta(x)}$$

Hipotezy złożone

Test

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } \lambda(x) > t \\ \gamma, & \text{gdy } \lambda(x) = t \\ 0, & \text{gdy } \lambda(x) < t \end{cases}$$

Dobór stałej t

$$\sup_{\theta \in \Theta_0} E_\theta \phi(X) \leq \alpha$$

7.2 Model dwupunktowy

Hipotezy złożone - przykład

Model dwupunktowy: $H_0 : \theta \leq \theta_0$ **vs** $H_1 : \theta > \theta_0$
Niech $\theta_0 \in (0,1)$. Model statystyczny

$$\{\{0,1,\ldots,n\}, \{B(n,\theta), \theta \in \Theta = (0,1)\}\}$$

$$H_0 : \theta \leq \theta_0 \text{ vs } H_1 : \theta > \theta_0$$

$$f_\theta(x) = \binom{n}{x} \theta^x (1-\theta)^{n-x}$$

Dla danego x

$$\sup_{\theta \in (0,1)} f_\theta(x) = f_{\frac{x}{n}}(x) = \binom{n}{x} \left(\frac{x}{n}\right)^x \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-x}$$

Hipotezy złożone - przykład

Model dwupunktowy: $H_0 : \theta \leq \theta_0$ **vs** $H_1 : \theta > \theta_0$

$$\sup_{\theta \in \Theta_0} f_\theta(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} \left(\frac{x}{n}\right)^x \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-x}, & \text{jeżeli } \frac{x}{n} \leq \theta_0, \\ \binom{n}{x} \theta_0^x (1-\theta_0)^{n-x}, & \text{jeżeli } \frac{x}{n} > \theta_0, \end{cases}$$

$$\sup_{\theta \in \Theta_1} f_\theta(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} \theta_0^x (1-\theta_0)^{n-x}, & \text{jeżeli } \frac{x}{n} \leq \theta_0, \\ \binom{n}{x} \left(\frac{x}{n}\right)^x \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-x}, & \text{jeżeli } \frac{x}{n} > \theta_0. \end{cases}$$

Hipotezy złożone - przykład

Model dwupunktowy: $H_0 : \theta \leq \theta_0$ **vs** $H_1 : \theta > \theta_0$

$$\lambda(x) = \frac{\sup\limits_{\theta \in \Theta_1} f_\theta(x)}{\sup\limits_{\theta \in \Theta_0} f_\theta(x)} = \begin{cases} \dfrac{\binom{n}{x}\theta_0^x(1-\theta_0)^{n-x}}{\binom{n}{x}\left(\frac{x}{n}\right)^x\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n-x}}, & \text{jeżeli } \frac{x}{n} \leq \theta_0, \\ \dfrac{\binom{n}{x}\left(\frac{x}{n}\right)^x\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n-x}}{\binom{n}{x}\theta_0^x(1-\theta_0)^{n-x}}, & \text{jeżeli } \frac{x}{n} > \theta_0. \end{cases}$$

Hipotezy złożone - przykład

Model dwupunktowy: $H_0 : \theta \leq \theta_0$ **vs** $H_1 : \theta > \theta_0$
$\lambda(x)$ jest rosnąca ze względu na x

$$\lambda(x) > t \Leftrightarrow x > k$$

Dobór stałej k

$$\sup_{\theta \leq \theta_0} P_\theta\{X > k\} = P_{\theta_0}\{X > k\} \leq \alpha$$

7.3 Model gaussowski

Hipotezy złożone - przykład

Model gaussowski: $H_0 : \mu = \mu_0$ **vs** $H_1 : \mu \neq \mu_0$
Niech $\mu_0 \in \mathcal{R}$. Model dla próby $\mathbb{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$:

$$\left(\mathcal{R}^n, \left\{N\left(\mu \mathbf{1}_n, \sigma^2 \mathbf{I}_n\right),\ \theta = (\mu, \sigma^2) \in \mathcal{R} \times \mathcal{R}_+\right\}\right)$$

$$\Theta = \mathcal{R} \times \mathcal{R}_+ \quad \Theta_0 = \{\mu_0\} \times \mathcal{R}_+ \quad \Theta_1 = (\mathcal{R} \setminus \{\mu_0\}) \times \mathcal{R}_+$$

$$H_0 : \mu = \mu_0 \text{ vs } H_1 : \mu \neq \mu_0$$

$$f_{\mu,\sigma}(\mathbf{x}) = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)^2\right\}$$

Hipotezy złożone - przykład

Model gaussowski: $H_0 : \mu = \mu_0$ **vs** $H_1 : \mu \neq \mu_0$

$$\sup_{\theta\in\Theta_0} f_{\mu,\sigma}(x) = f_{\mu_0,\tilde{\sigma}}(x) = \left(\frac{1}{\tilde{\sigma}\sqrt{2\pi}}\right)^n \exp\left\{-\frac{n}{2}\right\}$$

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_0)^2$$

$$\sup_{\theta\in\Theta} f_{\mu,\sigma}(x) = f_{\bar{x},\hat{\sigma}}(x) = \left(\frac{1}{\hat{\sigma}\sqrt{2\pi}}\right)^n \exp\left\{-\frac{n}{2}\right\}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

Hipotezy złożone - przykład

Model gaussowski: $H_0 : \mu = \mu_0$ **vs** $H_1 : \mu \neq \mu_0$
Iloraz wiarogodności

$$\lambda(x) = \frac{\sup_{\theta\in\Theta} f_{\mu,\sigma}(x)}{\sup_{\theta\in\Theta_0} f_{\mu,\sigma}(x)} = \left(\frac{\tilde{\sigma}}{\hat{\sigma}}\right)^n$$

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_0)^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X} + \bar{X} - \mu_0)^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 + n(\bar{X} - \mu_0)^2$$

$$\lambda(x) = \left(1 + \frac{n(\bar{X} - \mu_0)^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}\right)^{\frac{n}{2}}$$

Hipotezy złożone - przykład

Model gaussowski: $H_0 : \mu = \mu_0$ **vs** $H_1 : \mu \neq \mu_0$

$$\phi(x) = 1 \Leftrightarrow \lambda(x) > t \Leftrightarrow \frac{n(\bar{X} - \mu_0)^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2} > t'$$

Dobór stałej t'

$$E_{H_0}\phi(X) = \alpha$$

Hipotezy złożone - przykład

Model gaussowski: $H_0 : \mu = \mu_0$ **vs** $H_1 : \mu \neq \mu_0$

- jeżeli H_0 jest prawdziwa, to

$$\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0) \sim N(0, \sigma^2) \quad \text{czyli} \quad \frac{n(\bar{X} - \mu_0)^2}{\sigma^2} \sim \chi_1^2$$

- dla wszystkich $\theta \in \Theta$

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X}\right)^2 \sim \chi_{n-1}^2$$

- $\bar{X}$ oraz $\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X}\right)^2$ są niezależne

Hipotezy złożone - przykład

Model gaussowski: $H_0 : \mu = \mu_0$ **vs** $H_1 : \mu \neq \mu_0$
Jeżeli hipoteza H_0 jest prawdziwa, to

$$\frac{n(\bar{X} - \mu_0)^2}{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2} \sim F_{1,n-1}$$

Hipotezy złożone - przykład

Model gaussowski: $H_0 : \mu = \mu_0$ **vs** $H_1 : \mu \neq \mu_0$
H_0 jest odrzucana na poziomie istotności α, jeżeli

$$(*) \qquad \frac{n(\bar{X} - \mu_0)^2}{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2} > F_{1,n-1}^{\alpha}$$

Ponieważ $t_v = \sqrt{F_{1,v}}$, więc $(*)$ jest równoważne

$$(\clubsuit) \qquad \frac{|\bar{X} - \mu_0|}{S} \sqrt{n} > t_{n-1}^{\alpha}$$

Test $(\clubsuit)$ nazywa się **testem Studenta**

7.4 Moc testu

Moc testu

Określenie

$$\Theta_1 \ni \theta \to E_\theta \phi(X) = P_\theta\{\phi(X) = 1\}$$

Moc testu - przykład

Model gaussowski (σ^2 znana): $H_0 : \mu \leq \mu_0$ **vs** $H_1 : \mu > \mu_0$
Niech $\mu_0 \in \mathcal{R}$.

$$\left(\mathcal{R}^n, \left\{N\left(\mu \mathbf{1}_n, \sigma^2 \mathbf{I}_n\right),\ \theta = \mu \in \mathcal{R}\right\}\right)$$

$$\Theta = \mathcal{R} \quad \Theta_0 = (-\infty, \mu_0\rangle \quad \Theta_1 = (\mu_0, \infty)$$

$$H_0 : \mu \leq \mu_0 \text{ vs } H_1 : \mu > \mu_0$$

Obszar krytyczny testu

$$\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > u_{1-\alpha}$$

Moc testu - przykład

Model gaussowski (σ^2 znana): $H_0 : \mu \leq \mu_0$ **vs** $H_1 : \mu > \mu_0$
Niech $\mu > \mu_0$. Prawdopodobieństwo odrzucenia H_0

$$P_\mu\left\{\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > u_{1-\alpha}\right\} =$$
$$P_\mu\left\{\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} > u_{1-\alpha} - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\right\} =$$
$$1 - \Phi\left(u_{1-\alpha} - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\right)$$

Moc testu jest zależna od $(\mu - \mu_0)/\sigma$

7.5 Liczność próby

Liczność próby

Model gaussowski (σ^2 znana): $H_0 : \mu \leq \mu_0$ **vs** $H_1 : \mu > \mu_0$
Niech $(\mu - \mu_0)/\sigma = x_0$ będzie daną liczbą. Powiedzmy, że interesuje nas osiągnięcie dla tej wartości mocy co najmniej γ. Szukamy takiego n, że

$$1 - \Phi(u_{1-\alpha} - x_0\sqrt{n}) \geq \gamma$$

Rozwiązanie:

$$u_{1-\alpha} - x_0\sqrt{n} \leq u_{1-\gamma}$$

Stąd

$$n \geq \left[\frac{u_{1-\alpha} - u_{1-\gamma}}{x_0}\right]^2$$

minimalne n

x_0	0.6	0.7	0.8	0.85	0.9	0.95
0.01	48987	61720	78488	89783	105073	129946
0.1	489	617	784	897	1050	1299
0.2	122	154	196	224	262	324
0.3	54	68	87	99	116	144
0.4	30	38	49	56	65	81
0.5	19	24	31	35	42	51
0.6	13	17	21	24	29	36
0.7	9	12	16	18	21	26
0.8	7	9	12	14	16	20
0.9	6	7	9	11	12	16
1	4	6	7	8	10	12

8 Testy JNM w modelach z monotonicznym ilorazem wiarogodności

Pojęcia

Model statystyczny
Rozpatrujemy model statystyczny

$$(\mathcal{X}, \{P_\theta,\ \theta \in \Theta\})$$

w którym Θ jest pewnym przedziałem na prostej.

Rodzina rozkładów z monotonicznym ilorazem wiarogodności
$\{P_\theta,\ \theta \in \Theta\}$ jest rodziną z monotonicznym ilorazem wiarogodności, jeżeli istnieje taka funkcja $T(x)$, że jeżeli $\theta' > \theta$, to iloraz $p_{\theta'}(x)/p_\theta(x)$ jest niemalejącą funkcją $T(x)$.

Przykłady

- Rodzina rozkładów dwumianowych

$$\{Bin(n,\theta),\ \theta \in \langle 0,1\rangle\}$$

- Rodzina rozkładów jednostajnych

$$\{U(0,\theta):\ \theta > 0\}$$

- Jednopametrowe rodziny wykładnicze z gęstościami

$$p_\theta(x) = \exp\{c(\theta)T(x) - b(\theta)\} \cdot h(x)$$

Twierdzenie Karlina i Rubina
Niech $(\mathcal{X}, \{P_\theta,\ \theta \in \Theta\})$ będzie rodziną rozkładów z monotonicznym ilorazem wiarogodności względem funkcji T.

1. Dla testowania hipotezy $H_0:\ \theta \leq \theta_0$, przy alternatywie $H_1:\ \theta > \theta_0$, istnieje test JNM, określony w następujący sposób:

$$(*) \qquad \phi(x) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } T(x) > C, \\ \gamma, & \text{gdy } T(x) = C, \\ 0, & \text{gdy } T(x) < C, \end{cases}$$

   gdzie stałe C i γ są wyznaczone z warunku

$$(**) \qquad E_{\theta_0}\phi(X) = \alpha.$$

2. Funkcja

$$\beta(\theta) = E_\theta \phi(X)$$

   jest rosnąca w każdym punkcie θ, w którym $\beta(theta) < 1$.

4. Dla każdego θ' test określony warunkami $(*)$ oraz $(**)$ jest testem JNM dla testowania $H_0: \ \theta \leq \theta_\prime$, przy alternatywie $H_1: \ \theta > \theta_\prime$, na poziomie istotności $\alpha' = \beta(\theta')$.

5. Dla dowolnego $\theta < \theta_0$ test ten minimalizuje $\beta(\theta)$ (prawdopodobieństwo błędu pierwszego rodzaju) wśród wszystkich testów spełniających $(**)$

Wniosek
Jeżeli $(\mathcal{X}, \{P_\theta, \ \theta \in \Theta\})$ jest rodziną wykładniczą o rozkładzie

$$p_\theta(x) = \exp\{c(\theta)T(x) - b(\theta)\} \cdot h(x)$$

i jeżeli $c(\theta)$ jest funkcją rosnącą, to test JNM hipotezy $H_0 : \theta \leq \theta_0$ wobec $H_1 : \theta > \theta_0$ ma postać

$$(*) \qquad \phi(x) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } T(x) > C, \\ \gamma, & \text{gdy } T(x) = C, \\ 0, & \text{gdy } T(x) < C, \end{cases}$$

gdzie stałe C i γ są wyznaczone z warunku

$$E_{\theta_0}\phi(X) = \alpha.$$

Jeżeli $c(\theta)$ jest funkcją malejącą, to w definicji testu ϕ znaki nierówności zmieniają się na przeciwne.

Przykłady, w których można zastosować wniosek

- Niech $X_1, \ X_2, \ldots, \ X_n$ będzie próbą z rozkładu $N(\mu, 1)$. Weryfikujemy hipotezę $H_0: \ \mu \leq 0$ wobec hipotezy alternatywnej $H_1 : \mu > 0$, na poziomie istotności $\alpha \in (0, 1)$.

- Niech $X_1, \ X_2, \ldots, \ X_n$ będzie próbą z rozkładu $E(\lambda)$. Weryfikujemy hipotezę $H_0: \ \lambda \leq \lambda_0$ wobec hipotezy alternatywnej $H_1 : \lambda > \lambda_0$, na poziomie istotności $\alpha \in (0, 1)$. W tym przykładzie λ_0 jest ustaloną wartością dodatnią.

9 Elementy teorii podejmowania decyzji

Wprowadzenie

Przykład
Kupujemy 10 używanych samolotów. Pewna nieznana ich ilość θ może latać 1000 godzin bez naprawy i każdy z nich daje zysk $1000z$. Każdy z pozostałych będzie wymagał naprawy co da stratę w wysokości $1000q$. Przed podjęciem decyzji za cenę $1000r$ można na 1000 godzin wypożyczyć jeden z samolotów i decyzję uzależnić od jego zachowania. Przeanalizować problem i wybrać najlepsze postępowanie.

Decyzje:

$$\begin{aligned} d_1 &= \text{kupić samoloty} \\ d_2 &= \text{nie kupować samolotów} \end{aligned}$$

Bierzemy samolot na próbę:

x_1 (wynik próby OK)	x_2 (wynik próby nie OK)
$P_\theta(x_1) = \theta/10$	$P_\theta(x_2) = 1 - \theta/10$

Model statystyczny

$$\{\{0,1\}, \{D(\theta/10), \theta \in \Theta = \{0,1,\ldots,10\}\}\}$$

Funkcja straty

$$\begin{aligned} L(d_1,\theta) &= r - \theta z + (10-\theta)q \\ L(d_2,\theta) &= r \text{ dla wszystkich } \theta \end{aligned}$$

Postępowania (reguły decyzyjne) Wybrać najlepszą regułę decyzyjną! ■

	x_1	x_2
δ_1	nie kupować	nie kupować
δ_2	kupić	kupić
δ_3	kupić	nie kupować
δ_4	nie kupować	kupić

Definicje

Model statystyczny

$$\{\mathcal{X}, \{P_\theta : \theta \in \Theta\}\}$$

1. Zbiór obserwacji $\mathcal{X}$
2. Zbiór stanów natury Θ
3. Zbiór decyzji $\mathcal{D}$
4. Funkcja straty $L(d, \theta) : \mathcal{D} \times \Theta \to \mathcal{R}$
5. Reguła decyzyjna $\delta : \mathcal{X} \to \mathcal{D}$
6. Ryzyko reguły δ: $R_\delta(\theta) = E_\theta\{L(\delta(X), \theta)\}$

Zadanie: znaleźć regułę δ „optymalizującą” ryzyko

Optymalizacja:

1. jednostajna minimalizacja ryzyka
2. zasada minimaksu
3. reguła Bayesa

Estymacja

1. Zbiór decyzji $\mathcal{D} = \Theta = \mathcal{R}$
2. Funkcja straty $L(d, \theta) = (d - \theta)^2$
3. Reguła decyzyjna δ: estymator parametru θ
4. Ryzyko reguły δ: błąd średniokwadratowy

Jeżeli ograniczymy się do takich reguł δ, że

$$E_\theta \delta(X) = \theta, \qquad \forall \theta \in \Theta$$

to reguła **jednostajnie minimalizująca ryzyko** jest ENMW.

	$\theta \in \Theta_0$	$\theta \notin \Theta_0$
d_1	0	1
d_2	1	0

Weryfikacja hipotez

1. Zbiór decyzji

$$\mathcal{D} = \{d_1 = \{\theta \in \Theta_0\}, d_2 = \{\theta \notin \Theta_0\}\}$$

2. Funkcja straty $L(d, \theta)$
3. Reguła decyzyjna δ: test ϕ
4. Ryzyko reguły δ: prawdopodobieństwo błędnego wnioskowania

Jeżeli ograniczymy się do takich reguł δ, że

$$E_\theta \delta(X) \leq \alpha, \qquad \forall \theta \in \Theta_0$$

to reguła **jednostajnie minimalizująca ryzyko** jest testem jednostajnie najmocniejszym.

Optymalizacja

1. **Jednostajna minimalizacja ryzyka**

   Znaleźć taką regułę δ, że jeżeli δ' jest jakąkolwiek inną regułą, to

$$R_\delta(\theta) \leq R_{\delta'}(\theta) \qquad \forall \theta \in \Theta$$

2. **Zasada minimaksu**

   Znaleźć taką regułę δ, że jeżeli δ' jest jakąkolwiek inną regułą, to

$$\max_\theta R_\delta(\theta) \leq \max_\theta R_{\delta'}(\theta)$$

3. **Zasada Bayesa**

Znaleźć taką regułę δ, że jeżeli δ' jest jakąkolwiek inną regułą, to

$$\int_\Theta R_\delta(\theta)\Pi(d\theta) \le \int_\Theta R_{\delta'}(\theta)\Pi(d\theta)$$

gdzie Π jest taką miarą na zbiorze Θ, że $\int_\Theta \Pi(d\theta) = 1$

Przykład, cd. – Ryzyko reguły decyzyjnej

$$x_1 = \text{próba pozytywna} \quad x_2 = \text{próba negatywna}$$

Reguła δ_1: $\quad \delta_1(x_1) = d_2 \quad \delta_1(x_2) = d_2$

$$R_{\delta_1}(\theta) = r$$

Reguła δ_2: $\quad \delta_2(x_1) = d_1 \quad \delta_2(x_2) = d_1$

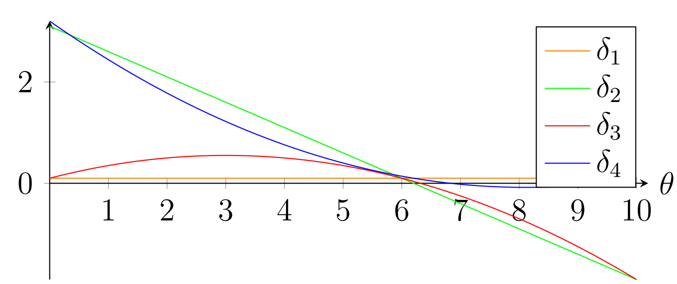
$$R_{\delta_2}(\theta) = r - \theta z + (10-\theta)q$$

Reguła δ_3: $\quad \delta_3(x_1) = d_1 \quad \delta_3(x_2) = d_2$

$$R_{\delta_3}(\theta) = \frac{\theta}{10}\{r - \theta z + (10-\theta)q\} + \left[1 - \frac{\theta}{10}\right] r$$

Reguła δ_4: $\quad \delta_4(x_1) = d_2 \quad \delta_4(x_2) = d_1$

$$R_{\delta_4}(\theta) = \frac{\theta}{10} r + \left[1 - \frac{\theta}{10}\right]\{r - \theta z + (10-\theta)q\}$$



Zasada minimaksu

$$z = 0.2 \quad q = 0.3 \quad r = 0.1$$

$\delta_1 : \max_\theta R_{\delta_1}(\theta) = 0.1$

$\delta_2 : \max_\theta R_{\delta_2}(\theta) = R_{\delta_2}(0) = 3.1$

$\delta_3 : \max_\theta R_{\delta_3}(\theta) = R_{\delta_3}(3) = 0.55$

$\delta_4 : \max_\theta R_{\delta_4}(\theta) = R_{\delta_4}(0) = 3.1$

Zasada bayesowska

$$P\{\theta = i\} = p_i, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, 10$$

$$\text{Średnie ryzyko reguły } \delta = \sum_{i=0}^{10} R_\delta(\theta = i) p_i$$

$$P\{\theta = i\} = \frac{1}{11}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, 10$$

	średnie ryzyko		
	$z = 0.20$ $q = 0.30$ $r = 0.10$	$z = 0.20$ $q = 0.05$ $r = 0.10$	$z = 0.20$ $q = 0.50$ $r = 0.01$
δ_1	0.10	0.100	0.10
δ_2	0.60	-0.650	1.60
δ_3	-0.15	-0.525	0.15
δ_4	0.85	-0.025	1.55

10 Statystyka bayesowska

Elementy statystyki bayesowskiej

Model statystyczny
$$\{\mathcal{X}, \{P_\theta : \theta \in \Theta\}\}$$

Rozkład *a priori*

Rozkład prawdopodobieństwa Π na zbiorze Θ

Oznaczenia

Rozkład P_θ oznaczać będziemy $P(\cdot|\theta)$, a jego gęstość przez $p(\cdot|\theta)$. Gęstość rozkładu *a priori* oznaczać będziemy przez $\pi(\cdot)$.

Rozkład *a posteriori*
$$\pi(\theta|x) = \pi(\theta)\frac{p(x|\theta)}{p(x)}, \qquad p(x) = \int_\Theta \pi(\theta)p(x|\theta)d\theta$$

Estymacja bayesowska

1. Funkcja starty: $L(\hat{\theta}, \theta)$
2. Ryzyko bayesowskie:
$$\int_\Theta \left[\int_\mathcal{X} L(\hat{\theta}(x), \theta)p(x|\theta)dx\right]\pi(\theta)d\theta =$$
$$= \int_\mathcal{X} \left[\int_\Theta L(\hat{\theta}(x), \theta)\pi(\theta|x)d\theta\right]p(x)dx$$
Estymator bayesowski minimalizuje
$$\int_\Theta L(\hat{\theta}(x), \theta)\pi(\theta|x)d\theta$$
3. Jeżeli $L(\hat{\theta}, \theta) = (\hat{\theta} - \theta)^2$, to estymatorem bayesowskim jest wartość oczekiwana rozkładu *a posteriori*

Bayesowskie testowanie hipotez

1. Zbiór decyzji

$$\mathcal{D} = \{d_1 = \{\theta = \theta_1\}, d_2 = \{\theta = \theta_2\}\}$$

2. Funkcja straty $L(d, \theta)$

	$\theta = \theta_1$	$\theta = \theta_2$
d_1	L_{11}	L_{12}
d_2	L_{21}	L_{22}

3. Rozkład *a priori*

$$P\{\theta = \theta_1\} = \pi_1 \quad P\{\theta = \theta_2\} = \pi_2 \quad \pi_1 + \pi_2 = 1$$

4. Oczekiwana strata *a posteriori* reguły δ (tzn. $\int_\Theta L(\delta(x), \theta)\pi(\theta|x)d\theta$)

$$\begin{aligned} \delta(x) = d_1 &\sim \pi_1 p(x|\theta_1)L_{11} + \pi_2 p(x|\theta_2)L_{12} \\ \delta(x) = d_2 &\sim \pi_1 p(x|\theta_1)L_{21} + \pi_2 p(x|\theta_2)L_{22} \end{aligned}$$

5. Reguła bayesowska: obszar przyjęć decyzji d_2

$$\left\{ x \in \mathcal{X} : \frac{p(x|\theta_2)}{p(x|\theta_1)} > \frac{\pi_1[L_{21} - L_{11}]}{\pi_2[L_{12} - L_{22}]} \right\}$$

Przykład: model dwumianowy
Model pojedynczej obserwacji X:

$$(\{0, 1\}, \{D(\theta),\ \theta \in [0, 1]\})$$

Rozkład *a priori* $U(0, 1)$: $\pi(\theta) = 1$ ($\theta \in [0, 1]$)

Rozkład *a posteriori* ($n = 1$)

$$P(1) = \int_0^1 P(1|\theta)\pi(\theta)d\theta = \int_0^1 \theta d\theta = \frac{1}{2}$$

$$P(0) = \int_0^1 P(0|\theta)\pi(\theta)d\theta = \int_0^1 (1 - \theta)d\theta = \frac{1}{2}$$

$$\pi(\theta|1) = \frac{P(1|\theta)\pi(\theta)}{P(1)} = 2\theta$$
$$\pi(\theta|0) = \frac{P(0|\theta)\pi(\theta)}{P(0)} = 2(1-\theta)$$

Przykład: model dwumianowy
Rozkład *a posteriori* ($n = 2$)

$$P(2) = \int_0^1 P(1|\theta)^2\pi(\theta)d\theta = \int_0^1 \theta^2 d\theta = \frac{1}{3}$$
$$P(1) = 2\int_0^1 P(1|\theta)P(0|\theta)\pi(\theta)d\theta = 2\int_0^1 \theta(1-\theta)d\theta = \frac{1}{3}$$
$$P(0) = \int_0^1 P(0|\theta)^2\pi(\theta)d\theta = \int_0^1 (1-\theta)^2 d\theta = \frac{1}{3}$$
$$\pi(\theta|2) = \frac{P(1|\theta)^2\pi(\theta)}{P(2)} = 3\theta^2$$
$$\pi(\theta|1) = \frac{P(1|\theta)P(0|\theta)\pi(\theta)}{P(1)} = 3\theta(1-\theta)$$
$$\pi(\theta|0) = \frac{P(0|\theta)^2\pi(\theta)}{P(0)} = 3(1-\theta)^2$$

Przykład: model dwumianowy
Rozkład *a posteriori* (n)

$$\begin{aligned} P(k) &= \binom{n}{k}\int_0^1 P(1|\theta)^k P(0|\theta)^{n-k}\pi(\theta)d\theta \\ &= \binom{n}{k}\int_0^1 \theta^k(1-\theta)^{n-k}d\theta = \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} \pi(\theta|k) &= \frac{\binom{n}{k}P(1|\theta)^k P(0|\theta)^{n-k}\pi(\theta)}{P(k)} \\ &= (n+1)\binom{n}{k}\theta^k(1-\theta)^{n-k} \end{aligned}$$

$\star\star\star$

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}, \quad \int_0^1 x^m(1-x)^l dx = \frac{m!l!}{(m+l+1)!}$$

Przykład: model dwumianowy
Estymator bayesowski

$$\begin{aligned}\hat{\theta}(k) &= \int_0^1 \theta\pi(\theta|k)d\theta \\ &= (n+1)\binom{n}{k}\int_0^1 \theta^{k+1}(1-\theta)^{n-k}d\theta \\ &= (n+1)\binom{n}{k}\frac{(k+1)!(n-k)!}{(n+2)!} \\ &= \frac{k+1}{n+2}\end{aligned}$$

Niech $\theta_1 < \theta_2 \in (0,1)$. Model statystyczny

$$\{\{0,1,\ldots,n\},\{B(n,\theta),\theta\in\Theta=\{\theta_1,\theta_2\}\}\}$$

Zbiór decyzji

$$\mathcal{D}=\{d_1=\{\theta=\theta_1\},d_2=\{\theta=\theta_2\}\}$$

Bayesowski obszar przyjęć decyzji d_2

$$\left\{x\in\mathcal{X}:\frac{p(x|\theta_2)}{p(x|\theta_1)}>\frac{\pi_1[L_{21}-L_{11}]}{\pi_2[L_{12}-L_{22}]}\right\}$$

$$\frac{\theta_2^k(1-\theta_2)^{n-k}}{\theta_1^k(1-\theta_1)^{n-k}}>\gamma$$

$$\left[\frac{\theta_2(1-\theta_1)}{\theta_1(1-\theta_2)}\right]^k>\gamma\left[\frac{1-\theta_1}{1-\theta_2}\right]^n$$

Reguła bayesowska

$$k>n\frac{\log\left[\frac{1-\theta_1}{1-\theta_2}\right]}{\log\left[\frac{\theta_2}{\theta_1}\right]+\log\left[\frac{1-\theta_1}{1-\theta_2}\right]}+\log\gamma$$

Niech $\pi_1=\pi_2=0.5$. Funkcja straty $L(d,\theta)$

	$\theta = \theta_1$	$\theta = \theta_2$
d_1	0	1
d_2	1	0

Reguła bayesowska

$$k > n \frac{\log\left[\frac{1-\theta_1}{1-\theta_2}\right]}{\log\left[\frac{\theta_2}{\theta_1}\right] + \log\left[\frac{1-\theta_1}{1-\theta_2}\right]}$$

Ryzyko reguły: prawdopodobieństwo błędnej decyzji

$\star\star\star$

Niech $n = 100$, $\theta_1 = 0.05$, $\theta_2 = 0.15$
Decyzja d_2, jeżeli $k > 9.19$