RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA I STATYSTYKA MATEMATYCZNA

Stanisław Jaworski

Katedra Ekonometrii i Informatyki
Zakład Statystyki

22 listopada 2019

Spis treści

Definicja

Rodzinę $\mathcal{F}$ spełniającą warunki

1. $\mathcal{F} \neq \emptyset$
2. *Jeśli* $A \in \mathcal{F}$*, to* $\Omega \setminus A \in \mathcal{F}$
3. *Jeśli* $A_i \in \mathcal{F}$ *dla* $i = 1, 2, \ldots,$ *to* $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

nazywamy σ **– ciałem podzbiorów zbioru** Ω.

Uwaga

Zdarzenie losowe *jest elementem rodziny* $\mathcal{F}$

Definicja

Prawdopodobieństwem *nazywamy dowolną funkcję* P, *określoną na* $\sigma-$*ciele zdarzeń* $\mathcal{F} \subseteq 2^{\Omega}$, *spełniającą warunki*

1. $P : \mathcal{F} \to \mathcal{R}_{+}$;
2. $P(\Omega) = 1$
3. *Jeśli* $A_i \in \mathcal{F},\ i = 1, 2, \ldots$ *oraz* $A_i \cap A_j = \emptyset$ *dla* $i \neq j$, *to*

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Uwaga

Mówimy, że matematyczny model doświadczenia losowego to trójka $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, *którą nazywamy* **przestrzenią probabilistyczną**

Twierdzenie

Jeśli $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *jest przestrzenią probabilistyczną i* $A,\ B,\ A_1,\ A_2, \ldots,\ A_n \in \mathcal{F}$*, to:*

1. $P(\emptyset) = 0$

Twierdzenie

Jeśli $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *jest przestrzenią probabilistyczną i* $A,\ B,\ A_1,\ A_2, \dots,\ A_n \in \mathcal{F}$, *to:*

1. $P(\emptyset) = 0$
2. *Jeśli* $A_1,\ A_2, \dots,\ A_n$ *wykluczają się wzajemnie, tj.* $A_i \cap A_j = \emptyset$ *dla* $i \neq j$, *to*

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

Twierdzenie

Jeśli $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *jest przestrzenią probabilistyczną i* $A,\ B,\ A_1,\ A_2, \ldots,\ A_n \in \mathcal{F}$*, to:*

1. $P(\emptyset) = 0$
2. *Jeśli* $A_1,\ A_2, \ldots,\ A_n$ *wykluczają się wzajemnie, tj.* $A_i \cap A_j = \emptyset$ *dla* $i \neq j$*, to*

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

3. $P(A') = 1 - P(A)$*, gdzie* $A' = \Omega \setminus A$

Twierdzenie

Jeśli $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *jest przestrzenią probabilistyczną i* $A,\ B,\ A_1,\ A_2, \dots,\ A_n \in \mathcal{F}$, *to:*

1. $P(\emptyset) = 0$
2. *Jeśli* $A_1,\ A_2, \dots,\ A_n$ *wykluczają się wzajemnie, tj.* $A_i \cap A_j = \emptyset$ *dla* $i \neq j$, *to*

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

3. $P(A') = 1 - P(A)$, *gdzie* $A' = \Omega \setminus A$
4. *Jeśli* $A \subseteq B$, *to* $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$

Twierdzenie

Jeśli $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *jest przestrzenią probabilistyczną i* $A,\ B,\ A_1,\ A_2, \ldots,\ A_n \in \mathcal{F}$*, to:*

1. $P(\emptyset) = 0$
2. *Jeśli* $A_1,\ A_2, \ldots,\ A_n$ *wykluczają się wzajemnie, tj.* $A_i \cap A_j = \emptyset$ *dla* $i \neq j$*, to*

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

3. $P(A') = 1 - P(A)$*, gdzie* $A' = \Omega \setminus A$
4. *Jeśli* $A \subseteq B$*, to* $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$
5. *Jeśli* $A \subseteq B$*, to* $P(A) \leqslant P(B)$

Twierdzenie

Jeśli $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *jest przestrzenią probabilistyczną i* $A,\ B,\ A_1,\ A_2, \ldots,\ A_n \in \mathcal{F}$*, to:*

1. $P(\emptyset) = 0$
2. *Jeśli* $A_1,\ A_2, \ldots,\ A_n$ *wykluczają się wzajemnie, tj.* $A_i \cap A_j = \emptyset$ *dla* $i \neq j$*, to*

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

3. $P(A') = 1 - P(A)$*, gdzie* $A' = \Omega \setminus A$
4. *Jeśli* $A \subseteq B$*, to* $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$
5. *Jeśli* $A \subseteq B$*, to* $P(A) \leqslant P(B)$
6. $P(A) \leqslant 1$

Twierdzenie

Jeśli $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *jest przestrzenią probabilistyczną i* $A,\ B,\ A_1,\ A_2, \ldots,\ A_n \in \mathcal{F}$, *to:*

1. $P(\emptyset) = 0$
2. *Jeśli* $A_1,\ A_2, \ldots,\ A_n$ *wykluczają się wzajemnie, tj.* $A_i \cap A_j = \emptyset$ *dla* $i \neq j$, *to*

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

3. $P(A') = 1 - P(A)$, *gdzie* $A' = \Omega \setminus A$
4. *Jeśli* $A \subseteq B$, *to* $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$
5. *Jeśli* $A \subseteq B$, *to* $P(A) \leqslant P(B)$
6. $P(A) \leqslant 1$
7. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Twierdzenie

Jeśli $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *jest przestrzenią probabilistyczną i* $A,\ B,\ A_1,\ A_2, \ldots,\ A_n \in \mathcal{F}$*, to:*

1. $P(\emptyset) = 0$
2. *Jeśli* $A_1,\ A_2, \ldots,\ A_n$ *wykluczają się wzajemnie, tj.* $A_i \cap A_j = \emptyset$ *dla* $i \neq j$*, to*

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

3. $P(A') = 1 - P(A)$*, gdzie* $A' = \Omega \setminus A$
4. *Jeśli* $A \subseteq B$*, to* $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$
5. *Jeśli* $A \subseteq B$*, to* $P(A) \leqslant P(B)$
6. $P(A) \leqslant 1$
7. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
8. **Wzór włączeń i wyłączeń**

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} P(A_i) - \sum_{1 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \leqslant n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \ldots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)$$

Twierdzenie (O ciągłości)

Niech$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *będzie przestrzenią probabilistyczną.*

1. *Jeśli* $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ *jest wstępującą rodziną zdarzeń oraz* $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$, *to* $P(A) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$.
2. *Jeśli* $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ *jest zstępującą rodziną zdarzeń oraz* $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A$, *to* $P(A) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$.

Rodzinę zdarzeń A_i *nazywamy wstępującą, jeśli*

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \subset A_n \subseteq A_{n+1} \cdots$$

i zstępującą, jeśli

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots \supset A_n \supseteq A_{n+1} \cdots$$

Definicja

Prawdopodobieństwem warunkowym *zajścia zdarzenia A pod warunkiem zajścia zdarzenia B, gdzie $P(B) > 0$, nazywamy liczbę*

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Uwaga

Przy ustalonym B prawdopodobieństwo warunkowe $P(A|B)$ jest zwykłym prawdopodobieństwem na $(\Omega, \mathcal{F})$, a także na $(B, \mathcal{F}_B)$, gdzie

$$\mathcal{F}_B = \{A \cap B : \ A \in \mathcal{F}\}$$

Definicja

Prawdopodobieństwem warunkowym *zajścia zdarzenia A pod warunkiem zajścia zdarzenia B, gdzie $P(B) > 0$, nazywamy liczbę*

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Uwaga

Przy ustalonym B prawdopodobieństwo warunkowe $P(A|B)$ jest zwykłym prawdopodobieństwem na $(\Omega, \mathcal{F})$, a także na $(B, \mathcal{F}_B)$, gdzie

$$\mathcal{F}_B = \{A \cap B : \ A \in \mathcal{F}\}$$

Twierdzenie (Wzór łańcuchowy)

Jeśli $P(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) > 0$, to

$$P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) =$$
$$= P(A_1)P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n|A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1})$$

Definicja

Rozbiciem przestrzeni Ω *nazywamy rodzinę zdarzeń* $\{H_i\}_{i \in I}$, *które wzajemnie wykluczają się, zaś ich suma jest równa* Ω.

Twierdzenie

Jeżeli $\{H_1,\ H_2, \ldots,\ H_n\}$ *jest rozbiciem* Ω *na zdarzenia o dodatnim prawdopodobieństwie, to dla dowolnego zdarzenia* A

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|H_i)P(H_i)$$

Definicja

Rozbiciem przestrzeni Ω *nazywamy rodzinę zdarzeń* $\{H_i\}_{i\in I}$, *które wzajemnie wykluczają się, zaś ich suma jest równa* Ω.

Twierdzenie

Jeżeli $\{H_1,\ H_2,\dots,\ H_n\}$ *jest rozbiciem* Ω *na zdarzenia o dodatnim prawdopodobieństwie, to dla dowolnego zdarzenia* A

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|H_i)P(H_i)$$

Uwaga

Twierdzenie jest prawdziwe dla $n = \infty$.

Definicja

Rozbiciem przestrzeni Ω *nazywamy rodzinę zdarzeń* $\{H_i\}_{i\in I}$*, które wzajemnie wykluczają się, zaś ich suma jest równa* Ω.

Twierdzenie

Jeżeli $\{H_1,\ H_2,\dots,\ H_n\}$ *jest rozbiciem* Ω *na zdarzenia o dodatnim prawdopodobieństwie, to dla dowolnego zdarzenia* A

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|H_i)P(H_i)$$

Uwaga

Twierdzenie jest prawdziwe dla $n = \infty$.

Uwaga

Niech $\{H_i\}_{i\in I}$ *będzie rozbiciem* Ω *na zdarzenia o dodatnim prawdopodobieństwie. Dla* $P(B) > 0$ *zachodzi*

$$P(A|B) = \sum_{i\in I} P(A|B\cap H_i)P(H_i|B),$$

gdzie zbiór indeksów I *jest skończony lub przeliczalny.*

Twierdzenie (Wzór Bayes'a)

Niech $\{H_i\}_{i\in I}$ *będzie rozbiciem* Ω *na zdarzenia o dodatnim prawdopodobieństwie i* $P(A) > 0$, *to dla dowolnego* $j \in I$ *mamy*

$$P(H_j|A) = \frac{P(A|H_j)P(H_j)}{\sum_{i\in I} P(A|H_i)P(H_i)}$$

Zdarzenia niezależne

Zdarzenie B nie zależy od zdarzenia A, gdy wiedza o tym, że zaszło A nie wpływa na prawdopodobieństwo zajścia B.

$$P(B|A) = P(B), \quad P(A) > 0$$

Zdarzenia niezależne

Zdarzenie B nie zależy od zdarzenia A, gdy wiedza o tym, że zaszło A nie wpływa na prawdopodobieństwo zajścia B.

$$P(B|A) = P(B), \quad P(A) > 0$$

$$\Downarrow$$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Zdarzenia niezależne

Zdarzenie B nie zależy od zdarzenia A, gdy wiedza o tym, że zaszło A nie wpływa na prawdopodobieństwo zajścia B.

$$P(B|A) = P(B), \quad P(A) > 0$$
$$\Downarrow$$
$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Definicja

Zdarzenia A oraz B nazywamy **niezależnymi**, *gdy*

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Zdarzenia niezależne

Zdarzenie B nie zależy od zdarzenia A, gdy wiedza o tym, że zaszło A nie wpływa na prawdopodobieństwo zajścia B.

$$P(B|A) = P(B), \quad P(A) > 0$$

$$\Downarrow$$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Definicja

Zdarzenia A oraz B nazywamy **niezależnymi**, *gdy*

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Definicja

Zdarzenia $A_1,\ A_2, \ldots,\ A_n$ nazywamy niezależnymi, gdy

$$P(A_{i\,1} \cap A_{i\,2} \cap \ldots \cap A_{i\,k}) = P(A_{i1}) \ldots P(A_{ik})$$

dla $1 \leq i_i < i_2, \ldots < i_k \leq n,\ k = 2, 3, \ldots, n$

Przyjmijmy konwencję: $A^0 = A,\ A^1 = A'$

Twierdzenie

Następujące warunki są równoważne:

1. *Zdarzenia* $A_1,\ A_2, \ldots,\ A_n$ *są niezależne;*
2. *Dla każdego ciągu* $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2, \ldots,\ \varepsilon_n$, *gdzie* $\varepsilon_i \in \{0, 1\},\ i = 1, 2, \ldots, n$, *zdarzenia* $A_1^{\varepsilon_1}, \ldots, A_n^{\varepsilon_n}$ *są niezależne;*
3. *Dla każdego ciągu* $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2, \ldots,\ \varepsilon_n$, *gdzie* $\varepsilon_i \in \{0, 1\},\ i = 1, 2, \ldots, n$, *zachodzi równość*
$$P(A_1^{\varepsilon_1} \cap \ldots \cap A_n^{\varepsilon_n}) = P(A_1^{\varepsilon_1}) \ldots P(A_n^{\varepsilon_n})$$

Definicja

Zdarzenia $A_1, A_2, \ldots$ *nazywamy niezależnymi, gdy dla każdego* n *zdarzenia* $A_1,\ A_2, \ldots,\ A_n$ *są niezależne.*

Zmienna losowa

Definicja

Zmienna losowa *jest to funkcja rzeczywista*

$$X : \Omega \to \mathcal{R}$$

o własności:

$$\bigwedge_{x \in \mathcal{R}} \{\omega \in \Omega : \; X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}$$

Zmienna losowa

Definicja

Zmienna losowa *jest to funkcja rzeczywista*

$$X : \Omega \to \mathcal{R}$$

o własności:

$$\bigwedge_{x \in \mathcal{R}} \{\omega \in \Omega : \ X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}$$

Definicja

Rozkładem prawdopodobieństwa zmiennej losowej X *nazywamy rozkład prawdopodobieństwa* P_X *określony wzorem*

$$P_X(A) = P(\{\omega \in \Omega : \ X(\omega) \in A\}) \quad \text{dla dowolnego } A \in \mathcal{B}(\mathcal{R})$$

Zmienna losowa

Definicja

Zmienna losowa *jest to funkcja rzeczywista*

$$X : \Omega \to \mathcal{R}$$

o własności:

$$\bigwedge_{x \in \mathcal{R}} \{\omega \in \Omega : \ X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}$$

Definicja

Rozkładem prawdopodobieństwa zmiennej losowej X *nazywamy rozkład prawdopodobieństwa* P_X *określony wzorem*

$$P_X(A) = P(\{\omega \in \Omega : \ X(\omega) \in A\}) \quad \textit{dla dowolnego } A \in \mathcal{B}(\mathcal{R})$$

Uwaga

Oznaczamy $X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega : \ X(\omega) \in A\}$

Zmienne losowe typu skokowego

Definicja

Mówimy, że zmienna losowa $X : \Omega \to \mathcal{R}$ *jest* **typu skokowego** *(dyskretnego), jeżeli istnieje zbiór skończony lub przeliczalny* $\mathcal{X} \subset \mathcal{R}$ *taki, że*

$$P_X(\mathcal{X}) = 1$$

Zmienne losowe typu skokowego

Definicja

Mówimy, że zmienna losowa $X : \Omega \to \mathcal{R}$ jest **typu skokowego** *(dyskretnego), jeżeli istnieje zbiór skończony lub przeliczalny $\mathcal{X} \subset \mathcal{R}$ taki, że*

$$P_X(\mathcal{X}) = 1$$

Definicja

Zmienna losowa X ma **rozkład dwumianowy** $Bin(n, p)$ *z parametrami n oraz p, jeżeli*

$$P_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Zmienne losowe typu skokowego

Definicja

Mówimy, że zmienna losowa $X : \Omega \to \mathcal{R}$ jest **typu skokowego** *(dyskretnego), jeżeli istnieje zbiór skończony lub przeliczalny $\mathcal{X} \subset \mathcal{R}$ taki, że*

$$P_X(\mathcal{X}) = 1$$

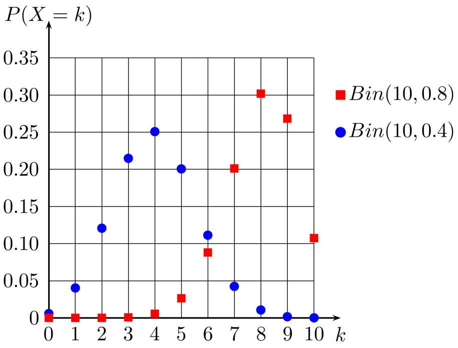
Definicja

Zmienna losowa X ma **rozkład dwumianowy** $Bin(n,p)$ *z parametrami n oraz p, jeżeli*

$$P_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Schemat Bernoulliego

Wykonujemy doświadczenie Bernoulliego. Wyniki nazywane są umownie sukcesem oraz porażką. Prawdopodobieństwo sukcesu wynosi p. Doświadczenie wykonujemy w sposób niezależny n krotnie. Niech zmienną losową X będzie liczba sukcesów. Zmienna X ma rozkład $X \sim Bin(n,p)$.


$P(X = k)$
0.35
0.30
0.25
0.20
0.15
0.10
0.05
0
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 k
$Bin(10, 0.8)$
$Bin(10, 0.4)$

Definicja

Zmienna losowa X ma **rozkład Poissona** $Po(\lambda)$ *z parametrem* $\lambda > 0$*, jeżeli*

$$P_X(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Definicja

Zmienna losowa X ma **rozkład Poissona** $Po(\lambda)$ *z parametrem $\lambda > 0$, jeżeli*

$$P_X(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Rozkład Poissona a rozkład dwumianowy

Jeżeli $X_n \sim Bin(n, p_n)$ oraz $\lim_{n\to\infty} np_n = \lambda$, to

$$\lim_{n\to\infty} P_{X_n}(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Definicja

Zmienna losowa X ma **rozkład ujemny dwumianowy** $NB(r,p)$ *z parametrami* r *oraz* p*, jeżeli*

$$P_X(k) = \binom{r+k-1}{k} p^r (1-p)^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Liczba porażek do r–tego sukcesu

Wykonujemy **doświadczenie Bernoulliego**. Wyniki nazywane są umownie *sukcesem* oraz *porażką*. Prawdopodobieństwo sukcesu wynosi p. Doświadczenie wykonujemy w sposób niezależny aż do uzyskania r-tego sukcesu. Niech zmienną losową X będzie liczba porażek. Zmienna X ma rozkład $NB(r,p)$.

Definicja

Zmienna losowa X ma **rozkład hipergeometryczny** $H(n, N, M)$ *z parametrami* n, N *oraz* M*, jeżeli*

$$P_X(k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \quad \max\{0, n-(N-M)\} \leq k \leq \min\{n, M\}.$$

Schemat urnowy

Z urny zawierającej N kul, w tym M białych, losujemy bez zwracania n kul. Zmienną losową jest liczba wylosowanych kul białych. Ta zmienna losowa ma rozkład hipergeometryczny $H(n, N, M)$

Definicja

Dystrybuanta *zmiennej losowej X, jest to funkcja* $F : \mathcal{R} \to [0, 1]$ *określona wzorem*

$$F_X(x) = P(X \leq x) \text{ dla } x \in \mathcal{R}$$

Uwaga

Zapis $\{X \leq x\}$ *oznacza zbiór* $\{\omega \in \Omega : \ X(\omega) \leq x\}$

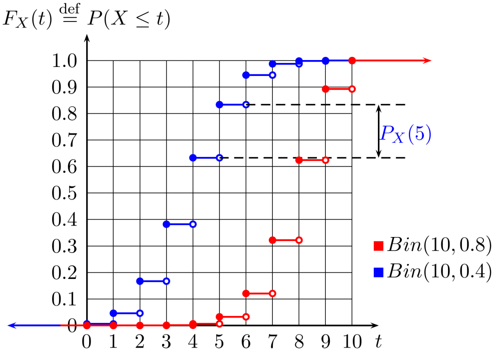
Definicja

Dystrybuanta *zmiennej losowej X, jest to funkcja* $F : \mathcal{R} \to [0,1]$ *określona wzorem*

$$F_X(x) = P(X \leq x) \text{ dla } x \in \mathcal{R}$$

Uwaga

Zapis $\{X \leq x\}$ *oznacza zbiór* $\{\omega \in \Omega : \ X(\omega) \leq x\}$



Dystrybuanta $F : \mathcal{R} \to [0, 1]$ ma następujące własności

1. **dystrybuanta jest funkcją niemalejącą**
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0, \quad \lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$
3. **dystrybuanta jest funkcją prawostronnie ciągłą**

Dystrybuanta $F : \mathcal{R} \to [0, 1]$ ma następujące własności

1. **dystrybuanta jest funkcją niemalejącą**
2. $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \to \infty} F(x) = 1$
3. **dystrybuanta jest funkcją prawostronnie ciągłą**
4. $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$
5. $P(X = a) = F(a) - F(a-)$
6. $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a-)$
7. $P(a < X < b) = F(b-) - F(a)$

Uwaga

$F(a-)$ *oznacza* $\lim_{x \to a^-} F(x)$

Definicja

Mówimy, że zmienna losowa o dystrybuancie F jest **typu ciągłego**, *jeżeli istnieje taka funkcja $f \geq 0$, że dla każdego $x \in \mathcal{R}$ zachodzi równość*

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(u)\,du$$

Funkcję f nazywamy **gęstością prawdopodobieństwa** *zmiennej losowej X lub w skrócie* **gęstością**

Definicja

Mówimy, że zmienna losowa o dystrybuancie F jest **typu ciągłego**, *jeżeli istnieje taka funkcja $f \geq 0$, że dla każdego $x \in \mathcal{R}$ zachodzi równość*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\, du$$

Funkcję f nazywamy **gęstością prawdopodobieństwa** *zmiennej losowej X lub w skrócie* **gęstością**

Własności

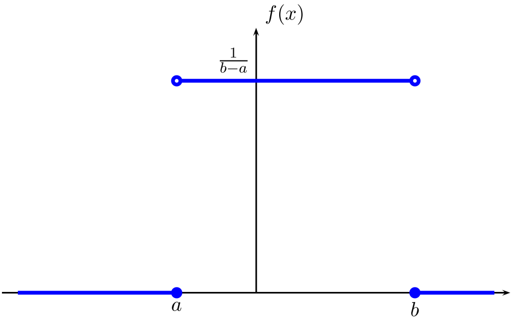
1. W punktach, w których f jest ciągła zachodzi $\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$
3. Każda nieujemna funkcja f spełniająca: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$, wyznacza dystrybuantę F za pomocą wzoru

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\, du$$

Definicja

Zmienna losowa X ma **rozkład jednostajny** $U(a,b)$ *na przedziale* (a,b)*, jeżeli jej funkcja gęstości rozkładu prawdopodobieństwa określona jest wzorem*

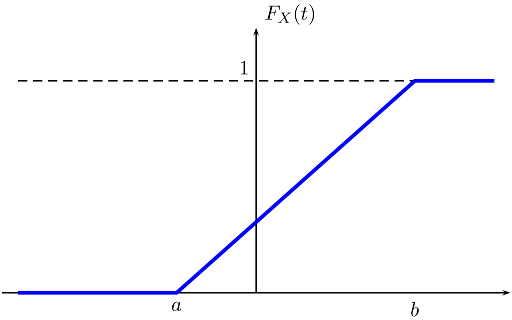
$$f(x) = \frac{1}{b-a}\mathbf{1}_{(a,b)}(x).$$



Definicja

Zmienna losowa X ma **rozkład jednostajny** $U(a,b)$ *na przedziale* (a,b)*, jeżeli jej funkcja gęstości rozkładu prawdopodobieństwa określona jest wzorem*

$$f(x) = \frac{1}{b-a}\mathbf{1}_{(a,b)}(x).$$



Definicja

Zmienna losowa X *ma* **rozkład jednostajny** $U(a,b)$ *na przedziale* (a,b), *jeżeli jej funkcja gęstości rozkładu prawdopodobieństwa określona jest wzorem*

$$f(x) = \frac{1}{b-a}\mathbf{1}_{(a,b)}(x).$$

Definicja

Zmienna losowa X *ma* **rozkład wykładniczy** $E(\lambda)$ *z parametrem* $\lambda > 0$, *jeżeli jej funkcja gęstości rozkładu prawdopodobieństwa określona jest wzorem*

$$f(x) = \frac{1}{\lambda}\exp\left\{-\frac{x}{\lambda}\right\}\mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)$$

Definicja

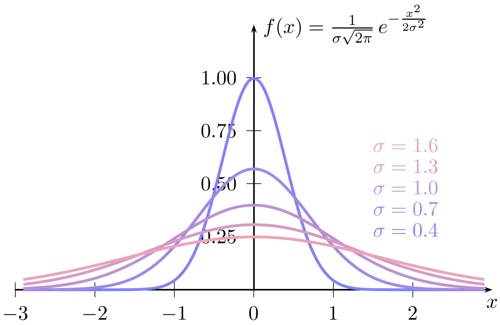
Zmienna losowa X *ma* **rozkład normalny** $N(\mu, \sigma^2)$, *jeżeli funkcja gęstości jej rozkładu prawdopodobieństwa wyraża się wzorem*

$$f_{\mu,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}.$$

Definicja

Zmienna losowa X ma **rozkład normalny** $N(\mu, \sigma^2)$*, jeżeli funkcja gęstości jej rozkładu prawdopodobieństwa wyraża się wzorem*

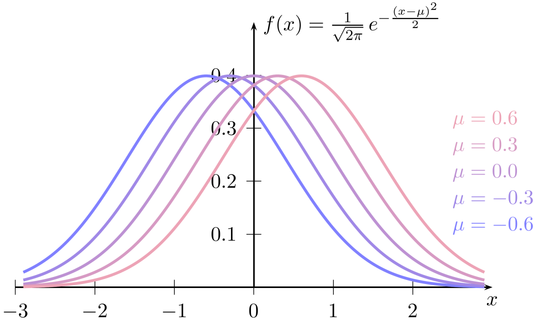
$$f_{\mu,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}.$$



Definicja

Zmienna losowa X ma **rozkład normalny** $N(\mu, \sigma^2)$*, jeżeli funkcja gęstości jej rozkładu prawdopodobieństwa wyraża się wzorem*

$$f_{\mu,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}.$$



Funkcje zmiennej losowej

Przykład

Niech $Y = aX + b$, gdzie $a \neq 0$ oraz X jest zmienną losową o rozkładzie

$$P_X(0) = 1/4, \; P_X(1) = 3/4.$$

Chcemy znaleźć rozkład zmiennej losowej Y.

$$P_X(0) = P_Y(b) = 1/4$$
$$P_X(1) = P_Y(a+b) = 3/4$$

Funkcje zmiennej losowej

Przykład

Niech $Y = aX + b$, gdzie $a \neq 0$ oraz X jest zmienną losową o rozkładzie

$$P_X(0) = 1/4, \; P_X(1) = 3/4.$$

Chcemy znaleźć rozkład zmiennej losowej Y.

$$\begin{aligned} P_X(0) &= P_Y(b) = 1/4 \\ P_X(1) &= P_Y(a+b) = 3/4 \end{aligned}$$

Przykład

Niech X będzie zmienną losową typu ciągłego o gęstości f_X, dystrybuancie F_X oraz niech $Y = aX + b, \; a < 0$. Chcemy znaleźć rozkład Y

$$\begin{aligned} F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X \geq \frac{y-b}{a}) = \\ = 1 - P\left(X < \frac{y-b}{a}\right) = 1 - F_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \end{aligned}$$

Zatem $f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = -\frac{1}{a} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$

Przykład

Niech X oznacza zmienną losową ciągłą o dystrybuancie F_X oraz gęstości f_X. Niech f_X jest funkcją ciągłą, a g funkcją ściśle monotoniczną oraz niech $h = g^{-1}$. Wtedy dystrybuantą zmiennej losowej $Y = g(X)$ jest:

(dla g - rosnącej)

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(g(X) \leq y) \\ &= P(X \leq h(y)) = F_X(h(y)) \end{aligned}$$

Jeżeli h jest funkcją różniczkowalną, to

$$\frac{d}{dy} F_Y(y) = f_X(h(y))h'(y)$$

jest gęstością zmiennej losowej $Y = g(X)$

Przykład

Niech X oznacza zmienną losową ciągłą o dystrybuancie F_X oraz gęstości f_X. Niech f_X jest funkcją ciągłą, a g funkcją ściśle monotoniczną oraz niech $h = g^{-1}$. Wtedy dystrybuantą zmiennej losowej $Y = g(X)$ jest:

(dla g - malejącej)

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(g(X) \leq y) \\ &= P(X \geq h(y)) = 1 - F_X(h(y)) \end{aligned}$$

Jeżeli h jest funkcją różniczkowalną, to

$$\frac{d}{dy} F_Y(y) = f_X(h(y))(-h'(y))$$

jest gęstością zmiennej losowej $Y = g(X)$

Zatem w obu przypadkach $f_Y(y) = f_X(h(y))|h'(y)|$

Twierdzenie

Niech X będzie zmienną losową typu ciągłego. Niech g będzie funkcją określoną na zbiorze $\bigcup_{k=1}^{n}[a_k, b_k]$, która na każdym przedziale otwartym (a_k, b_k) jest funkcją ściśle monotoniczną oraz ma ciągłą pochodną. Niech $h_k(y)$ będzie funkcją odwrotną do funkcji $g(x)$ na przedziale $I_k = g((a_k, b_k))$. Wówczas funkcja gęstości zmiennej losowej $Y = g(X)$ ma następującą postać

$$f_Y(y) = \sum_{k=1}^{n} f_X(h_k(y)) \cdot |h_k'(y)| \cdot I_{I_k}(y)$$

Wartość oczekiwana i wariancja zmiennej losowej

Definicja

Wartość oczekiwaną (wartość przeciętna, nadzieję matematyczną) zmiennej losowej X oznaczamy symbolem $E(X)$ i określamy w następujący sposób:

- *Jeżeli X jest zmienną losową typu skokowego, $\mathbb{X} = \{x_1, x_2, \ldots\}$, przy czym szereg*

$$\sum_k |x_k| P(X = x_k)$$

jest zbieżny, to

$$E(X) = \sum_k x_k P(X = x_k)$$

Wartość oczekiwana i wariancja zmiennej losowej

Definicja

Wartość oczekiwaną (wartość przeciętna, nadzieję matematyczną) zmiennej losowej X *oznaczamy symbolem* $E(X)$ *i określamy w następujący sposób:*

- *Jeżeli* X *jest zmienną losową typu skokowego,* $\mathbb{X} = \{x_1, x_2, \ldots\}$, *przy czym szereg*

$$\sum_k |x_k| P(X = x_k)$$

  jest zbieżny, to

$$E(X) = \sum_k x_k P(X = x_k)$$

- *Jeżeli* X *jest zmienną losową typu ciągłego o gęstości* f *i zbieżna jest całka*

$$\int_{\mathcal{R}} |x| f(x)\, dx,$$

  to

$$E(X) = \int_{\mathcal{R}} x\, f(x)\, dx$$

Wartość oczekiwana i wariancja zmiennej losowej

Definicja

Wartość oczekiwaną (wartość przeciętna, nadzieję matematyczną) zmiennej losowej X oznaczamy symbolem $E(X)$ i określamy w następujący sposób:

- *Jeżeli X jest zmienną losową typu skokowego, $\mathbb{X} = \{x_1, x_2, \ldots\}$, przy czym szereg*

  $$\sum_k |x_k| P(X = x_k)$$

  jest zbieżny, to

  $$E(X) = \sum_k x_k P(X = x_k)$$

- *Jeżeli X jest zmienną losową typu ciągłego o gęstości f i zbieżna jest całka*

  $$\int_{\mathcal{R}} |x| f(x)\, dx,$$

  to

  $$E(X) = \int_{\mathcal{R}} x\, f(x)\, dx$$

- **Ogólnie:** $E(X) = \int_{\Omega} X(\omega) dP(\omega)$

Własności wartości oczekiwanej

Jeżeli $E(X) < \infty$, $E(Y) < \infty$, to

- $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$
- $E(aX+b) = aE(X) + b$, dla $a, b \in \mathcal{R}$
- Jeżeli $X \geq 0$, to $E(X) = \int\limits_0^\infty P(X > t)\, dt$
- Jeżeli X oraz Y są niezależne, to

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

Własności wartości oczekiwanej

Jeżeli $E(X) < \infty,\ E(Y) < \infty$, to

- $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$
- $E(aX+b) = aE(X) + b,\quad$ dla $a, b \in \mathcal{R}$
- Jeżeli $X \geq 0$, to $E(X) = \int\limits_0^\infty P(X > t)\, dt$
- Jeżeli X oraz Y są niezależne, to

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

Twierdzenie

Jeżeli funkcja φ jest borelowska, to

- *Dla X z rozkładu skokowego*

$$E(\varphi(X)) = \sum_k \varphi(x_k) P(X = x_k)$$

- *Dla X z rozkładu ciągłego o gęstości $f(x)$*

$$E(\varphi(X)) = \int_{\mathcal{R}} \varphi(x) f(x)\, dx$$

Definicja

Jeżeli $E(X - EX)^2 < \infty$*, to tę liczbę nazywamy wariancją zmiennej losowej* X *i oznaczamy:*

$$D^2X = E(X - EX)^2$$

Definicja

Pierwiastek z wariancji nazywamy odchyleniem standardowym i oznaczamy przez DX

Definicja

Jeżeli $E(X - EX)^2 < \infty$*, to tę liczbę nazywamy wariancją zmiennej losowej* X *i oznaczamy:*

$$D^2X = E(X - EX)^2$$

Definicja

Pierwiastek z wariancji nazywamy odchyleniem standardowym i oznaczamy przez DX

Uwaga

$$\begin{aligned} D^2X = E(X - EX)^2 &= E(X^2 - 2X \cdot EX + (EX)^2) \\ &= EX^2 - (EX)^2 \end{aligned}$$

Definicja

Jeżeli $E(X - EX)^2 < \infty$, *to tę liczbę nazywamy wariancją zmiennej losowej* X *i oznaczamy:*

$$D^2X = E(X - EX)^2$$

Definicja

Pierwiastek z wariancji nazywamy odchyleniem standardowym i oznaczamy przez DX

Uwaga

$$\begin{aligned} D^2X = E(X - EX)^2 &= E(X^2 - 2X \cdot EX + (EX)^2) \\ &= EX^2 - (EX)^2 \end{aligned}$$

Własności wariancji

Jeżeli X *jest zmienną losową, dla której* $EX^2 < \infty$, *to istnieje* D^2X *oraz:*

- $D^2X \geq 0$
- $D^2(cX) = c^2D^2X$
- $D^2(X + a) = D^2X$
- $D^2X = 0$ *wtedy i tylko wtedy, gdy zmienna losowa* X *jest z prawdopodobieństwem 1 stała*

Uwaga

$$
\begin{aligned}
E(X-t)^2 =& E(X-EX+EX-t)^2 \\
=& E(X-EX)^2 + E(X-t)^2 - \\
& -2E((X-EX)(EX-t)) \\
=& E(X-EX)^2 + E(X-t)^2 - \\
& -2E(X-EX)\cdot E(EX-t) \\
\geq& E(X-EX)^2
\end{aligned}
$$

Zatem funkcja $f(t) = E(X-t)^2$ *przyjmuje minimum – równe wariancji – dla* $t = EX$

Wektory losowe

Definicja

Wektor losowy $\mathbb{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ *to odwzorowanie*

$$\mathbb{X} : \Omega \to \mathcal{R}^n$$

o własności:

$$\{\omega \in \Omega : \; X_1(\omega) \leq x_1, \ldots, X_n(\omega) \leq x_n\} \in \mathcal{F}$$

dla dowolnego $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathcal{R}^n$

Wektory losowe

Definicja

Wektor losowy $\mathbb{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ *to odwzorowanie*

$$\mathbb{X} : \Omega \to \mathcal{R}^n$$

o własności:

$$\{\omega \in \Omega : \; X_1(\omega) \leq x_1, \ldots, X_n(\omega) \leq x_n\} \in \mathcal{F}$$

dla dowolnego $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathcal{R}^n$

Definicja

Rozkładem prawdopodobieństwa wektora losowego $\mathbb{X}$ *nazywamy rozkład prawdopodobieństwa* $P_{\mathbb{X}}$ *określony wzorem*

$$P_{\mathbb{X}}(A) = P(\{\omega \in \Omega : \; \mathbb{X}(\omega) \in A\}) \quad \textit{dla } A \in \mathcal{B}(\mathcal{R}^n)$$

Wektory losowe

Definicja

Wektor losowy $\mathbb{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ *to odwzorowanie*

$$\mathbb{X} : \Omega \to \mathcal{R}^n$$

o własności:

$$\{\omega \in \Omega : \; X_1(\omega) \leq x_1, \ldots, X_n(\omega) \leq x_n\} \in \mathcal{F}$$

dla dowolnego $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathcal{R}^n$

Definicja

Rozkładem prawdopodobieństwa wektora losowego $\mathbb{X}$ *nazywamy rozkład prawdopodobieństwa* $P_{\mathbb{X}}$ *określony wzorem*

$$P_{\mathbb{X}}(A) = P(\{\omega \in \Omega : \; \mathbb{X}(\omega) \in A\}) \quad \textit{dla } A \in \mathcal{B}(\mathcal{R}^n)$$

Definicja

Funkcja $F_{\mathbb{X}} : \mathcal{R}^n \to [0, 1]$ *postaci*

$$F_{\mathbb{X}}(x_1, \ldots, x_n) = P(X_1 \leq x_1, \ldots, X_n \leq x_n)$$

nazywamy dystrybuantą wektora losowego $\mathbb{X}$

Definicja

Wektor losowy jest typu skokowego, jeżeli istnieje zbiór przeliczalny $\mathcal{X} \subset \mathcal{R}^n$, taki że $P_{\mathbb{X}}(\mathcal{X}) = 1$

Definicja

Wektor losowy jest typu skokowego, jeżeli istnieje zbiór przeliczalny $\mathcal{X} \subset \mathcal{R}^n$*, taki że* $P_{\mathbb{X}}(\mathcal{X}) = 1$

Definicja

Wektor losowy jest typu ciągłego, jeżeli istnieje nieujemna funkcja $f_{\mathbb{X}}(x_1,\ x_2, \dots,\ x_n)$*, zwana gęstością, taka że dla każdego* $\mathbf{x} = (x_1,\ x_2, \dots,\ x_n) \in \mathcal{R}^n$

$$F_{\mathbb{X}}(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_2} f_{\mathbb{X}}(u_1, \dots, u_n)\, du_1 \dots du_n$$

Definicja

Wektor losowy jest typu skokowego, jeżeli istnieje zbiór przeliczalny $\mathcal{X} \subset \mathcal{R}^n$*, taki że* $P_{\mathbb{X}}(\mathcal{X}) = 1$

Definicja

Wektor losowy jest typu ciągłego, jeżeli istnieje nieujemna funkcja $f_{\mathbb{X}}(x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n)$*, zwana gęstością, taka że dla każdego* $\mathbf{x} = (x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n) \in \mathcal{R}^n$

$$F_{\mathbb{X}}(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_2} f_{\mathbb{X}}(u_1, \ldots, u_n)\, du_1 \ldots du_n$$

Uwaga

Prawie wszędzie ma miejsce równość

$$\frac{\partial F_{\mathbb{X}}(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_1, \ldots, \partial x_n} = f_{\mathbb{X}}(x_1, \ldots, x_n)$$

Dla dowolnego $A \in \mathcal{B}(\mathcal{R}^n)$ *zachodzi*

$$\int_A f_{\mathbb{X}}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$$

Zauważmy, że

$$
\begin{aligned}
P(X_1 \in A) &= P(X_1 \in A, X_2 \in \mathcal{R}, \ldots, X_n \in \mathcal{R}) \\
&= \int\limits_A \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{\mathbb{X}}(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n \\
&= \int\limits_A \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{\mathbb{X}}(x_1, \ldots, x_n)\, dx_2 \ldots dx_n \right) dx_1
\end{aligned}
$$

Zauważmy, że

$$P(X_1 \in A) = P(X_1 \in A, X_2 \in \mathcal{R}, \ldots, X_n \in \mathcal{R})$$
$$= \int_A \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathbb{X}}(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n$$
$$= \int_A \left(\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathbb{X}}(x_1, \ldots, x_n)\, dx_2 \ldots dx_n \right) dx_1$$

Zatem

$$f_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathbb{X}}(x_1, \ldots, x_n)\, dx_2 \ldots dx_n$$

Jest to tzw. **brzegowa gęstość prawdopodobieństwa.**

Rozkłady brzegowe, przypadek zmiennych typu ciągłego

$$f_{(X_1,X_2)}(x_1,x_2) = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathbb{X}}(x_1,\ldots,x_n)\,dx_3\ldots dx_n$$

$$f_{(X_1,X_2,X_3)}(x_1,x_2,x_3) = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathbb{X}}(x_1,\ldots,x_n)\,dx_4\ldots dx_n$$

Rozkłady brzegowe, przypadek zmiennych dyskretnych

Niech wektor losowy (X,Y) ma rozkład określony liczbami

$$p_{ik} = P(X = x_i, Y = y_k),\ \text{gdzie}\ \ i \in I,\ \ k \in K.$$

Wówczas rozkład zmiennej losowej X określają liczby

$$p_i = P(X = x_i) = \sum_{k \in K} p_{ik},\ \text{gdzie}\ i \in I$$

Definicja

Niech $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *będzie przestrzenią probabilistyczną, a* $X_1,\ X_2, \ldots,\ X_n$ *będą zmiennymi losowymi określonymi na tej przestrzeni. Mówimy, że te zmienne losowe są niezależne, jeżeli dla dowolnych zbiorów borelowskich* $A_1,\ A_2, \ldots,\ A_n$ *zachodzi:*

$$P(X_1 \in A_1, \ldots, X_n \in A_n) = P(X_1 \in A_1) \ldots P(X_n \in A_n)$$

Definicja

Niech $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *będzie przestrzenią probabilistyczną, a* $X_1,\ X_2, \ldots,\ X_n$ *będą zmiennymi losowymi określonymi na tej przestrzeni. Mówimy, że te zmienne losowe są niezależne, jeżeli dla dowolnych zbiorów borelowskich* $A_1,\ A_2, \ldots,\ A_n$ *zachodzi:*

$$P(X_1 \in A_1, \ldots, X_n \in A_n) = P(X_1 \in A_1) \ldots P(X_n \in A_n)$$

Definicja

Mówimy, że zmienne losowe $X_1,\ X_2, \ldots$ *są niezależne, jeżeli każdy skończony podciąg ciągu* $X_1,\ X_2, \ldots$ *składa się z niezależnych zmiennych losowych*

Definicja

Niech $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *będzie przestrzenią probabilistyczną, a* $X_1,\ X_2, \dots,\ X_n$ *będą zmiennymi losowymi określonymi na tej przestrzeni. Mówimy, że te zmienne losowe są niezależne, jeżeli dla dowolnych zbiorów borelowskich* $A_1,\ A_2, \dots,\ A_n$ *zachodzi:*

$$P(X_1 \in A_1, \dots, X_n \in A_n) = P(X_1 \in A_1) \dots P(X_n \in A_n)$$

Definicja

Mówimy, że zmienne losowe $X_1,\ X_2, \dots$ *są niezależne, jeżeli każdy skończony podciąg ciągu* $X_1,\ X_2, \dots$ *składa się z niezależnych zmiennych losowych*

Twierdzenie

Dla zmiennych losowych $X_1,\ X_2, \dots,\ X_n$ *następujące warunki są równoważne*

- *zmienne losowe są niezależne*
- *dla* $\mathbf{x} = (x_1,\ x_2, \dots,\ x_n) \in R^n$

$$F_{\mathbb{X}}(\mathbf{x}) = F_{X_1}(x_1) \dots F_{X_n}(x_n)$$

Twierdzenie

Jeżeli $\mathbb{X} = (X_1,\ X_2, \dots,\ X_n)$ *jest wektorem losowym typu skokowego to warunkiem koniecznym i wystarczającym niezależności zmiennych losowych* $X_1,\ X_2, \dots,\ X_n$ *jest:*

$$P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = P_1(X_1 = x_1) \dots P_n(X_n = x_n)$$

dla każdego $(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{R}^n$*, gdzie* P_k *oznacza brzegowy rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej* X_k *(*$k = 1, 2, \dots, n$*).*

Twierdzenie

Jeżeli $\mathbb{X} = (X_1,\ X_2, \ldots,\ X_n)$ *jest wektorem losowym typu skokowego to warunkiem koniecznym i wystarczającym niezależności zmiennych losowych* $X_1,\ X_2, \ldots,\ X_n$ *jest:*

$$P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) = P_1(X_1 = x_1) \ldots P_n(X_n = x_n)$$

dla każdego $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{R}^n$*, gdzie* P_k *oznacza brzegowy rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej* X_k *(*$k = 1, 2, \ldots, n$*).*

Twierdzenie

Jeżeli $\mathbb{X} = (X_1,\ X_2, \ldots,\ X_n)$ *jest wektorem losowym typu ciągłego o gęstości* $f_{\mathbb{X}}$*, to warunkiem koniecznym i wystarczającym niezależności zmiennych losowych* $X_1,\ X_2, \ldots,\ X_n$ *jest:*

$$f_{\mathbb{X}}(\mathbf{x}) = f_{X_1}(x_1) \ldots f_{X_n}(x_n),$$

dla każdego $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{R}^n$*, gdzie* f_{X_k} *jest gęstością rozkładu brzegowego zmiennej losowej* X_k *(*$k = 1, \ldots, n$ *)*

Wartość oczekiwana oraz macierz kowariancji wektora losowego

Definicja (Wartość oczekiwana wektora losowego)

$$E(\mathbb{X}) = E\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EX_1 \\ EX_2 \\ \vdots \\ EX_n \end{bmatrix}$$

Wartość oczekiwana oraz macierz kowariancji wektora losowego

Definicja (Wartość oczekiwana wektora losowego)

$$E(\mathbb{X}) = E\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EX_1 \\ EX_2 \\ \vdots \\ EX_n \end{bmatrix}$$

Definicja (Macierz kowariancji wektora losowego)

$$D^2(\mathbb{X}) = \begin{bmatrix} Cov(X_1, X_1) & Cov(X_1, X_2) & \cdots & Cov(X_1, X_n) \\ Cov(X_2, X_1) & Cov(X_2, X_2) & \cdots & Cov(X_2, X_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Cov(X_n, X_1) & Cov(X_n, X_2) & \cdots & Cov(X_n, X_n) \end{bmatrix},$$

gdzie
$Cov(X_i, X_j) = E[(X_i - EX_i)(X_j - EX_j)] = E(X_iX_j) - EX_iEX_j$

Podstawowe własności

Jeżeli A, B są macierzami odpowiedniego wymiaru, to

- $E(A\mathbb{X}) = AE(\mathbb{X})$
- $E(A\mathbb{X}B) = AE(\mathbb{X})B$
- $D^2(A\mathbb{X}) = AD^2(\mathbb{X})A'$

Podstawowe własności

Jeżeli A, B są macierzami odpowiedniego wymiaru, to

- $E(A\mathbb{X}) = AE(\mathbb{X})$
- $E(A\mathbb{X}B) = AE(\mathbb{X})B$
- $D^2(A\mathbb{X}) = AD^2(\mathbb{X})A'$

Wielowymiarowy rozkład normalny $N(\mu, \Sigma)$

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n|\Sigma|}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mu)'\Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\mu)\right], \ \mathbf{x} \in \mathcal{R}^n$$

- $E(\mathbb{X}) = \mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix}$
- $D^2(\mathbb{X}) = \Sigma$
- $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

Definicja

Ciąg zmiennych losowych $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ *jest zbieżny do zmiennej losowej* X **według prawdopodobieństwa**, *jeżeli*

$$\textit{dla każdego } \varepsilon > 0 \quad \lim_n P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$$

oznaczenie: $X_n \xrightarrow{P} X$

Definicja

Ciąg zmiennych losowych $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ *jest zbieżny do zmiennej losowej* X **według prawdopodobieństwa**, *jeżeli*

$$\text{dla każdego } \varepsilon > 0 \quad \lim_n P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$$

oznaczenie: $X_n \stackrel{P}{\to} X$

Definicja

Ciąg zmiennych losowych $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ *jest zbieżny do zmiennej losowej* X **prawie na pewno**, *jeżeli*

$$P\left(\left\{\omega : \lim_n X_n(\omega) = X(\omega)\right\}\right) = 1$$

oznaczenie $X_n \stackrel{p.n.}{\to} X$

Definicja

Ciąg zmiennych losowych $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ *jest zbieżny do zmiennej losowej* X **według prawdopodobieństwa**, *jeżeli*

$$\text{dla każdego } \varepsilon > 0 \quad \lim_n P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$$

oznaczenie: $X_n \xrightarrow{P} X$

Definicja

Ciąg zmiennych losowych $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ *jest zbieżny do zmiennej losowej* X **prawie na pewno**, *jeżeli*

$$P\left(\left\{\omega : \lim_n X_n(\omega) = X(\omega)\right\}\right) = 1$$

oznaczenie $X_n \xrightarrow{p.n.} X$

Definicja

Ciąg zmiennych losowych $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ *jest zbieżny do zmiennej losowej* X **według rozkładu**,*jeżeli ciąg dystrybuant* $(F_{X_n})_{n=1}^{\infty}$ *jest zbieżny do dystrybuanty* F_X *w każdym punkcie jej ciągłości.*

oznaczenie $X_n \xrightarrow{D} X$

Definicja

Ciąg zmiennych losowych $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ *jest zbieżny do zmiennej losowej* X **według prawdopodobieństwa**, *jeżeli*

$$\textit{dla każdego } \varepsilon > 0 \quad \lim_n P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$$

oznaczenie: $X_n \xrightarrow{P} X$

Definicja

Ciąg zmiennych losowych $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ *jest zbieżny do zmiennej losowej* X **prawie na pewno**, *jeżeli*

$$P\left(\left\{\omega : \lim_n X_n(\omega) = X(\omega)\right\}\right) = 1$$

oznaczenie $X_n \xrightarrow{p.n.} X$

Definicja

Ciąg zmiennych losowych $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ *jest zbieżny do zmiennej losowej* X **według rozkładu**,*jeżeli ciąg dystrybuant* $(F_{X_n})_{n=1}^{\infty}$ *jest zbieżny do dystrybuanty* F_X *w każdym punkcie jej ciągłości.*

oznaczenie $X_n \xrightarrow{D} X$

$$(X_n \xrightarrow{p.n.} X) \Rightarrow (X_n \xrightarrow{P} X) \Rightarrow (X_n \xrightarrow{D} X)$$

Prawa wielkich liczb

Oznaczmy

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n, \quad \bar{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \ldots +, X_n}{n}$$

Niech $X_1,\ X_2, \ldots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie, o wartości średniej μ i wariancji $0 < \sigma^2 < \infty$. Wtedy zachodzi

Prawa wielkich liczb

Oznaczmy

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n, \quad \bar{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \ldots +, X_n}{n}$$

Niech $X_1,\ X_2, \ldots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie, o wartości średniej μ i wariancji $0 < \sigma^2 < \infty$. Wtedy zachodzi

Słabe prawo wielkich liczb

$$(\forall \varepsilon > 0) \quad \lim_{n \to \infty} P\left(\left|\bar{X}_n - \mu\right| < \varepsilon\right) = 1$$

$$\boxed{\bar{X}_n \xrightarrow{P} \mu}$$

Prawa wielkich liczb

Oznaczmy

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n, \quad \bar{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \ldots +, X_n}{n}$$

Niech $X_1,\ X_2, \ldots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie, o wartości średniej μ i wariancji $0 < \sigma^2 < \infty$. Wtedy zachodzi

Mocne prawo wielkich liczb

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \bar{X}_n = \mu\right) = 1$$

$$\boxed{\bar{X}_n \stackrel{p.n.}{\to} \mu}$$

Prawa wielkich liczb

Oznaczmy

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n, \quad \bar{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \ldots +, X_n}{n}$$

Niech $X_1, \ X_2, \ldots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie, o wartości średniej μ i wariancji $0 < \sigma^2 < \infty$. Wtedy zachodzi

Centralne twierdzenie graniczne

$$\sup_{x \in \mathcal{R}} \left| P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x \right) - \Phi(x) \right| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

Prawa wielkich liczb

Oznaczmy

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n, \quad \bar{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \ldots +, X_n}{n}$$

Niech $X_1,\ X_2, \ldots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie, o wartości średniej μ i wariancji $0 < \sigma^2 < \infty$. Wtedy zachodzi

Centralne twierdzenie graniczne

$$\sup_{x \in \mathcal{R}} \left| P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x \right) - \Phi(x) \right| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

$$\boxed{\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \xrightarrow{D} N(0,1)}$$

Wnioskowanie statystyczne

Statystyka Nauka poświęcona metodom badania (analizowania) zjawisk masowych; polega na systematyzowaniu obserwowanych cech ilościowych i jakościowych; posługuje się rachunkiem prawdopodobieństwa.

Wnioskowanie statystyczne

Statystyka Nauka poświęcona metodom badania (analizowania) zjawisk masowych; polega na systematyzowaniu obserwowanych cech ilościowych i jakościowych; posługuje się rachunkiem prawdopodobieństwa.

Pojęcia podstawowe

Populacja Zbiór obiektów z wyróżnioną cechą (cechami).Obiektami mogą być przedmioty lub wartości cechy

Wnioskowanie statystyczne

Statystyka Nauka poświęcona metodom badania (analizowania) zjawisk masowych; polega na systematyzowaniu obserwowanych cech ilościowych i jakościowych; posługuje się rachunkiem prawdopodobieństwa.

Pojęcia podstawowe

Populacja Zbiór obiektów z wyróżnioną cechą (cechami).Obiektami mogą być przedmioty lub wartości cechy

Próba Wybrana część populacji podlegająca badaniu. Próba powinna stanowić reprezentację populacji w tym sensie, że częstości występowania w próbie każdej z badanych cech nie powinny się znacznie różnić od częstości występowania tych cech w populacji

Wnioskowanie statystyczne

Statystyka Nauka poświęcona metodom badania (analizowania) zjawisk masowych; polega na systematyzowaniu obserwowanych cech ilościowych i jakościowych; posługuje się rachunkiem prawdopodobieństwa.

Pojęcia podstawowe

Populacja Zbiór obiektów z wyróżnioną cechą (cechami).Obiektami mogą być przedmioty lub wartości cechy

Próba Wybrana część populacji podlegająca badaniu. Próba powinna stanowić reprezentację populacji w tym sensie, że częstości występowania w próbie każdej z badanych cech nie powinny się znacznie różnić od częstości występowania tych cech w populacji

Cecha losowa Wielkość losowa charakteryzująca obiekty danej populacji

Rodzaje cech

niemierzalna – zwana też jakościową – przyjmuje wartości nie będące liczbami (np. *kolor*, *płeć*,*smak*)

Rodzaje cech

niemierzalna – zwana też jakościową – przyjmuje wartości nie będące liczbami (np. *kolor*, *płeć*,*smak*)

mierzalna – zwana też ilościową – przyjmuje pewne wartości liczbowe (np. *długość, wytrzymałość, ciężar*)

Rodzaje cech

niemierzalna – zwana też jakościową – przyjmuje wartości nie będące liczbami (np. *kolor*, *płeć*,*smak*)

mierzalna – zwana też ilościową – przyjmuje pewne wartości liczbowe (np. *długość, wytrzymałość, ciężar*)

Rodzaje cech mierzalnych

skokowa – zwana też dyskretną – nie przyjmuje wartości pośrednich (np. *ilość bakterii*, *ilość pracowników*, *ilość pasażerów*,).

Rodzaje cech

niemierzalna – zwana też jakościową – przyjmuje wartości nie będące liczbami (np. *kolor*, *płeć*,*smak*)

mierzalna – zwana też ilościową – przyjmuje pewne wartości liczbowe (np. *długość, wytrzymałość, ciężar*)

Rodzaje cech mierzalnych

skokowa – zwana też dyskretną – nie przyjmuje wartości pośrednich (np. *ilość bakterii*, *ilość pracowników*, *ilość pasażerów*,).

ciągła – przyjmuje wartości z pewnego przedziału liczbowego (np. *wzrost*, *waga*, *ciśnienie*, *czas obsługi*)

Przykłady parametrów charakteryzujących populację

Mediana badanej cechy to wartość, która dzieli populację na dwie części. Połowa obiektów w populacji ma cechę o wartości poniżej mediany, a połowa powyżej.

Przykłady parametrów charakteryzujących populację

Mediana badanej cechy to wartość, która dzieli populację na dwie części. Połowa obiektów w populacji ma cechę o wartości poniżej mediany, a połowa powyżej.

Kwartyl dolny badanej cechy to wartość, która dzieli populację w stosunku 1:3. Jedna czwarta obiektów w populacji ma cechę o wartości poniżej kwartyla dolnego, a pozostałe trzy czwarte powyżej.

Przykłady parametrów charakteryzujących populację

Mediana badanej cechy to wartość, która dzieli populację na dwie części. Połowa obiektów w populacji ma cechę o wartości poniżej mediany, a połowa powyżej.

Kwartyl dolny badanej cechy to wartość, która dzieli populację w stosunku 1:3. Jedna czwarta obiektów w populacji ma cechę o wartości poniżej kwartyla dolnego, a pozostałe trzy czwarte powyżej.

Kwartyl górny badanej cechy to wartość, która dzieli populację w stosunku 3:1. Trzy czwarte obiektów w populacji ma cechę o wartości poniżej kwartyla dolnego, a pozostała jedna trzecia powyżej.

Przykłady parametrów charakteryzujących populację

Mediana
: badanej cechy to wartość, która dzieli populację na dwie części. Połowa obiektów w populacji ma cechę o wartości poniżej mediany, a połowa powyżej.

Kwartyl dolny
: badanej cechy to wartość, która dzieli populację w stosunku 1:3. Jedna czwarta obiektów w populacji ma cechę o wartości poniżej kwartyla dolnego, a pozostałe trzy czwarte powyżej.

Kwartyl górny
: badanej cechy to wartość, która dzieli populację w stosunku 3:1. Trzy czwarte obiektów w populacji ma cechę o wartości poniżej kwartyla dolnego, a pozostała jedna trzecia powyżej.

Średnia
: ...

Wariancja
: ...

Mierniki położenia i rozproszenia próby; przykłady

Niech X oznacza cechę losową. Niech wartości $x_1, x_2, \ldots, x_n$ oznaczają n realizacji tej cechy. Przez $x_{1:n}, x_{2:n}, \ldots, x_{n:n}$ będą oznaczane realizacje tej cechy w kolejności od najmniejszej do największej.

Mierniki położenia	Oznaczenia	Wzór
średnia	$\bar{x}$	$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$
mediana	Me	$x_{(n+1)/2:n}$ (gdy n nieparzyste) $(x_{n/2:n} + x_{n/2+1:n})/2$ (gdy n parzyste)
dolny kwartyl	Q_1	$x_{[n/4]:n}$
górny kwartyl	Q_3	$x_{[3n/4]:n}$
dominanta (moda)	D	najczęściej występująca wartość
minimium	Min	$x_{1:n}$
maksimum	Max	$x_{n:n}$

$[a]$ – część całkowita liczby a

Mierniki położenia i rozproszenia próby; przykłady

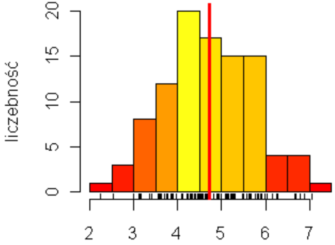
Niech X oznacza cechę losową. Niech wartości $x_1, x_2, \ldots, x_n$ oznaczają n realizacji tej cechy. Przez $x_{1:n}, x_{2:n}, \ldots, x_{n:n}$ będą oznaczane realizacje tej cechy w kolejności od najmniejszej do największej.

Mierniki rozproszenia	Oznaczenia	Wzór
rozstęp	R	$Max - Min$
wariancja	S^2	$\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$
odchylenie standardowe	S	$\sqrt{S^2}$
odchylenie przeciętne	d	$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\lvert x_i - \bar{x}\rvert$
odchylenie ćwiartkowe	Q	$\frac{Q_3 - Q_1}{2}$
współczynnik zmienności	V	$\frac{S}{\bar{x}}100\%$

Wnioskowanie statystyczne polega na wnioskowaniu o populacji na podstawie próby

Przykład

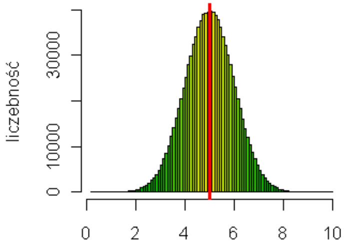
Badamy rozkład wartości cechy w populacji na podstawie próby 100 elementowej. Średnia z próby $\bar{x} = 4.717641$. W tym przykładzie wiadomo, że średnia populacyjna $\mu = 5$



Wnioskowanie statystyczne polega na wnioskowaniu o populacji na podstawie próby

Przykład

Badamy rozkład wartości cechy w populacji na podstawie próby 1000000 elementowej. Średnia z próby $\bar{x} = 5.000585$. W tym przykładzie wiadomo, że średnia populacyjna $\mu = 5$



Estymacja punktowa

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ oznacza próbę z populacji oraz θ parametr charakteryzujący tę populację. Na podstawie próby chcemy oszacować (przybliżyć) wartość parametru θ.

Estymator punktowy jest funkcją próby. Przybliża wartość parametru θ:

$$\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

Estymacja punktowa parametrów cechy $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

Estymator średniej μ — średnia arytmetyczna

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$$

Estymator wariancji σ^2 — wariancja próbkowa

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

Estymator odchylenia standardowego σ

$$S = \sqrt{S^2}$$

Estymacja punktowa parametru p cechy $X \sim D(p)$

Niech n oznacza liczbę obiektów wylosowanych z populacji, wśród których znalazło się k obiektów, które posiadają wyróżnioną właściwość. Przyjmując, że p oznacza prawdopodobieństwo wylosowania z populacji obiektu o wyróżnionej właściwości mamy:

$$\hat{p} = \frac{k}{n}$$

Uwaga. Przyjmując dla $i = 1, 2, \ldots, n$, że $P(X_i = 1) = p = 1 - P(X_i = 0)$, mamy $\hat{p} = \bar{X}$.

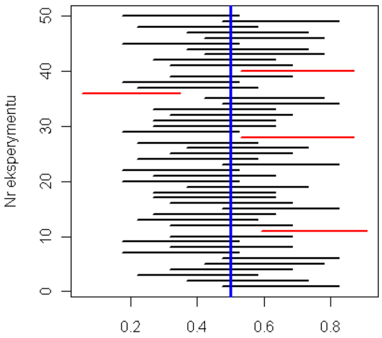
Estymacja przedziałowa

Przedział ufności (estymator przedziałowy) jest przedziałem o końcach zależnych od próby, który z pewnym z góry zadanym prawdopodobieństwem $1-\alpha$ pokrywa nieznaną wartość parametru θ:

$$P\{\theta \in (\underline{\theta}(X_1,\ldots,X_n), \overline{\theta}(X_1,\ldots,X_n))\} \geq 1-\alpha \quad (\forall\theta).$$

Poziom ufności jest to ustalone prawdopodobieństwo $1-\alpha$.

Ilustracja estymacji przedziałowej parametru $\theta = 0.5$ (oznaczonego pionową niebieską linią) na poziomie ufności $1-\alpha = 0.9$



Populacja z wyróżnioną cechą X

Przedział ufności dla średniej μ w rozkładzie normalnym $N(\mu, \sigma^2)$

Wariancja σ^2 jest nieznana

Poziom ufności: $1 - \alpha$

$$(\bar{X} - t(1-\alpha/2; n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t(1-\alpha/2; n-1)\frac{S}{\sqrt{n}})$$

$t(\gamma; \nu)$ jest stablicowanym kwantylem rzędu γ rozkładu t (t–Studenta) z ν stopniami swobody.

	Kwantyl rozkładu $t-$ Studenta			
	γ			
ν	0.9500	0.9750	0.9875	0.9950
8	1.8595	2.3060	2.7515	3.3554
9	1.8331	2.2622	2.6850	3.2498
10	1.8125	2.2281	2.6338	3.1690

Przykład

Na podstawie próby 1.1, 1.2, 0.8, 0.9, 1.2, 1.3, 1.0, 0.7, 0.8, 1.0 oszacować wartość średnią μ rozkładu obserwowanej cechy $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, na poziomie ufności $1 - \alpha = 0.95$.

$$\bar{x} = \frac{1.1 + 1.2 + \cdots + 1.0}{10} = 1.0$$

$$\sum (x_i - \bar{x})^2 = (1.1 - 1.0)^2 + \cdots + (1.0 - 1.0)^2 = 0.36$$

$$s^2 = \frac{0.36}{10 - 1} = 0.04, \;\; s = \sqrt{s^2} = 0.2$$

$$t(0.975; 9) = 2.2622$$

$$t(0.975; 9)\frac{s}{\sqrt{n}} = 2.2622\frac{0.2}{\sqrt{10}} = 0.14$$

$$(1 - 0.14, 1 + 0.14) = (0.86, 1.14)$$

Wniosek. Średnia wartość cechy jest jakąś liczbą z przedziału $(0.86, 1.14)$. Zaufanie do tego wniosku wynosi 95%.

Przedział ufności dla wariancji w rozkładzie normalnym

Średnia μ jest nieznana

Poziom ufności: $1-\alpha$

$$\left(\frac{\sum_i (X_i - \bar{X})^2}{\chi^2(\frac{\alpha}{2}; n-1)}, \frac{\sum_i (X_i - \bar{X})^2}{\chi^2(1-\frac{\alpha}{2}; n-1)} \right)$$

$\chi^2(\alpha;\nu)$ jest stablicowaną wartością krytyczną rozkładu chi–kwadrat z ν stopniami swobody.

ν	Wartości krytyczne $\chi^2(\alpha; r)$			
	α			
	0.975	0.950	0.050	0.025
8	2.1797	2.7326	15.5073	17.5345
9	2.7004	3.3251	16.9190	19.0228
10	3.2470	3.9403	18.3070	20.4832

Przykład

Na podstawie próby 1.1, 1.2, 0.8, 0.9, 1.2, 1.3, 1.0, 0.7, 0.8, 1.0 oszacować zróżnicowanie rozkładu obserwowanej cechy.

$$\bar{x} = \frac{1.1 + 1.2 + \cdots + 1.0}{10} = 1.0$$

$$\sum_i (x_i - \bar{x})^2 = (1.1 - 1.0)^2 + \cdots + (1.0 - 1.0)^2 = 0.36$$

$$s^2 = \frac{0.36}{10 - 1} = 0.04, \;\; s = \sqrt{s^2} = 0.2$$

Poziom ufności $1 - \alpha = 0.95$, czyli $\alpha = 0.05$.

$$\chi^2(\frac{\alpha}{2}; n-1) = \chi^2(0.025; 9) = 19.0228$$

$$\chi^2(1 - \frac{\alpha}{2}; n-1) = \chi^2(0.975; 9) = 2.7004$$

$$\left(\frac{0.36}{19.0228}, \frac{0.36}{2.7004}\right) = (0.019, 0.133)$$

Wniosek. Wariancja cechy jest liczbą z przedziału $(0.019, 0.133)$. Zaufanie do tego wniosku wynosi 95%.

Estymacja prawdopodobieństwa sukcesu

Przedział przybliżony

$$\left(\hat{p} - u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)$$

	Kwantyle u_α rozkładu normalnego $N(0,1)$				
α	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006
0.96	1.7744	1.7866	1.7991	1.8119	1.8250
0.97	1.9110	1.9268	1.9431	1.9600	1.9774
0.98	2.0969	2.1201	2.1444	2.1701	2.1973
0.99	2.4089	2.4573	2.5121	2.5758	2.6521

Na przykład $u_{0.975} = 1.96$

Populacja 1, cecha X_1

Populacja 2, cecha X_2

Oznaczenia

Próby: $X_{11}, \ldots, X_{1n_1}$; $X_{21}, \ldots, X_{2n_2}$

$$\bar{X}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}, \quad s_i^2 = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \bar{X}_i)^2}{n_i - 1}$$

$$s_e^2 = \frac{\sum_{j=1}^{n_1} (X_{1j} - \bar{X}_1)^2 + \sum_{j=1}^{n_2} (X_{2j} - \bar{X}_2)^2}{n_1 + n_2 - 2}, \quad s_r^2 = s_e^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)$$

Ocena różnicy między średnimi $\mu_1 - \mu_2$

Ocena punktowa: $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$

Założenia:

1. $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$
2. X_1, X_2 są niezależne
3. $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

Przedział ufności (poziom ufności $1 - \alpha$)

$$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - t(1 - \alpha/2; n_1 + n_2 - 2)s_r, \bar{X}_1 - \bar{X}_2 + t(1 - \alpha/2; n_1 + n_2 - 2)s_r)$$

Przykład. Z dwóch populacji pobrano próby: 60, 62, 65, 63, 60 oraz 58, 53, 57, 56, 61. Ocenić różnicę średnich.

$$\bar{x}_1 = 62, \sum_{i=1}^{5}(x_{1i} - \bar{x}_1)^2 = 18, \bar{x}_2 = 57, \sum_{i=1}^{5}(x_{2i} - \bar{x}_2)^2 = 34$$

$$s_r^2 = \frac{18+34}{5+5-2}\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5}\right) = 2.6$$

$$t(0.975; 8) = 2.3060; t(0.975; 8)s_r = 3.72$$

$$(62 - 57 - 3.72, 62 - 57 + 3.72) = (1.28, 8.72)$$

Wniosek. Różnica średnich jest liczbą z przedziału $(1.28, 8.72)$

Ocena różnicy frakcji $p_1 - p_2$

Założenia: $X_1 \sim D(p_1), \quad X_2 \sim D(p_2)$
Cechy X_1, X_2 są niezależne

Próba 1: $X_{11}, X_{12}, \ldots, X_{1n_1}$ ($X_{1i} = 0$ lub 1)
Próba 2: $X_{21}, X_{22}, \ldots, X_{2n_2}$ ($X_{2i} = 0$ lub 1)

$k_1 = \sum_{i=1}^{n_1} X_{1i}$
$k_2 = \sum_{i=1}^{n_2} X_{2i}$

Ocena punktowa: $\hat{p}_1 - \hat{p}_2 = \frac{k_1}{n_1} - \frac{k_2}{n_2}$

Przybliżony przedział ufności (poziom ufności $1 - \alpha$)

$$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 \pm u_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}$$

Iloraz frakcji: $\frac{p_1}{p_2}$ (ryzyko względne)

$$\ln(\frac{\hat{p}_1}{\hat{p}_2}) \pm u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{1-\hat{p}_1}{n_1\hat{p}_1}+\frac{1-\hat{p}_2}{n_2\hat{p}_2}}$$

Przykład: Porównanie lekarstw ze względu na odsetek osób, które nie reagują na podany lek

p_1	p_2	$p_1 - p_2$	p_1/p_2
0.01	0.001	0.009	10
0.410	0.401	0.009	1.02

Rozkład prawdopodobieństwa oraz dane

	Y	
X	p_{11}	p_{12}
	p_{21}	p_{22}

	Y	
X	n_{11}	n_{12}
	n_{21}	n_{22}

Iloraz szans $\theta = \frac{p_{11}/p_{12}}{p_{21}/p_{22}}$

Estymator ilorazu szans $\hat{\theta} = \frac{\hat{p}_{11}/\hat{p}_{12}}{\hat{p}_{21}/\hat{p}_{22}} = \frac{n_{11}n_{22}}{n_{12}n_{21}}$

Przedział ufności dla $\ln(\theta)$

$$\ln(\hat{\theta}) \pm u_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{1}{n_{11}} + \frac{1}{n_{12}} + \frac{1}{n_{21}} + \frac{1}{n_{22}}}$$

Weryfikacja hipotez statystycznych

Błąd I rodzaju
: Błąd wnioskowania polegający na odrzuceniu hipotezy, gdy w rzeczywistości jest ona prawdziwa.

Błąd II rodzaju
: Błąd wnioskowania polegający na nieodrzuceniu hipotezy, gdy w rzeczywistości jest ona fałszywa.

	Decyzja o hipotezie	
Hipoteza	nie odrzucić	odrzucić
prawdziwa	prawidłowa	błędna
fałszywa	błędna	prawidłowa

Błąd I rodzaju kontroluje się przez zadanie małej wartości dla poziomu istotności. **Poziom istotności** jest to górne ograniczenie prawdopodobieństwa popełnienia błędu I rodzaju.

Błędu II rodzaju nie można kontrolować w taki sposób, jak błąd I rodzaju. W praktyce nie wiadomo, ile dokładnie wynosi prawdopodobieństwo popełnienia tego błędu.

Porównanie średniej z normą

Cecha X ma rozkład normalny $N(\mu, \sigma^2)$
Średnia μ oraz wariancja σ^2 są nieznane

$$H_0: \ \mu = \mu_0$$

Test Studenta (poziom istotności α)

Próba: $X_1, \ldots, X_n$

Statystyka testowa

$$t_{\text{emp}} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S}\sqrt{n} \ .$$

Jeżeli $|t_{\text{emp}}| > t(1 - \alpha/2; n - 1)$, to hipotezę odrzucamy.

Przykład. W biochemicznym doświadczeniu badano czas życia komórek w pewnym środowisku. Dokonano ośmiu pomiarów uzyskując wyniki (w godzinach): 4.7, 5.3, 4.0, 3.8, 6.2, 5.5, 4.5, 6.0. Czy można uznać, że średni czas życia komórek w badanym środowisku wynosi 4 godziny?

Cecha X — czas życia komórki ($X \sim N(\mu, \sigma^2)$)

$$H_0 : \mu = 4$$

Test Studenta; poziom istotności $\alpha = 0.05$

$$\bar{x} = 5, \ s = 0.891227, \ t_{\text{emp}} = 3.1736, \ t(0.975; 7) = 2.3646$$

Weryfikacja: Ponieważ $t_{\text{emp}} > t(0.975; 7)$, odrzucamy hipotezę

Wniosek: średni czas życia komórek w badanym środowisku nie wynosi 4 godziny.

Porównanie zróżnicowania z normą

Cecha X ma rozkład normalny $N(\mu, \sigma^2)$
Średnia μ oraz wariancja σ^2 są nieznane

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$$

Statystyka chi–kwadrat (poziom istotności α)
Próba: $X_1, \ldots, X_n$

Statystyka testowa $\chi^2_{\text{emp}} = \frac{\sum_i (X_i - \bar{X})^2}{\sigma_0^2}$

Wartości krytyczne $\chi^2(1 - \frac{\alpha}{2}; n-1)$, $\chi^2(\frac{\alpha}{2}; n-1)$

Jeżeli $\chi^2_{\text{emp}} < \chi^2(1 - \frac{\alpha}{2}; n-1)$ lub $\chi^2_{\text{emp}} > \chi^2(\frac{\alpha}{2}; n-1)$ to hipotezę $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ odrzucamy.

Porównanie frakcji z normą

Cecha $X \sim D(p)$
p nie jest znane

$$H_0 : \; p = p_0$$

Statystyka testowa

$$u_{\text{emp}} = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$

Wartość krytyczna: $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$

Jeżeli $|u_{\text{emp}}| > u_{1-\frac{\alpha}{2}}$, to hipotezę odrzucamy.

Przykład. Dziesięć lat temu odsetek dzieci chorych na astmę wynosił 4%. Czy odsetek ten uległ zmianie, jeżeli w próbie dwustu dzieci rozpoznano osiemnaście przypadków astmy?

Niech X oznacza liczbę przypadków astmy wśród wylosowanych dzieci. Możemy założyć, że $X \sim B(200, p)$, gdzie p oznacza prawdopodobieństwo wylosowania dziecka chorego na astmę.

Cel: Zweryfikować hipotezę $H_0: \; p = 0.04$

Zadaję poziom istotności $\alpha = 0.05$.

Wyznaczam $\hat{p} = 0.09, \; u_{\text{emp}} = \frac{0.09-0.04}{\sqrt{\frac{0.04(1-0.04)}{200}}} = 2.887, \; u_{0.975} = 1.96$

Ponieważ $|u_{\text{emp}}| > u_{0.975}$, hipotezę odrzucamy.

Wniosek: Odsetek dzieci chorych na astmę uległ zmianie.

Porównanie średnich

Cecha X_1 ma rozkład normalny $N(\mu_1, \sigma_1^2)$
Cecha X_2 ma rozkład normalny $N(\mu_2, \sigma_2^2)$
Średnia μ_1 oraz wariancja σ_1^2 są nieznane
Średnia μ_2 oraz wariancja σ_2^2 są nieznane
$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$

test t–Studenta

$$t_{\mathsf{emp}} = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{S_r}$$

Wartość krytyczna $t(1 - \alpha/2; n_1 + n_2 - 2)$
Jeżeli $|t_{\mathsf{emp}}| > t(1 - \alpha/2; n_1 + n_2 - 2)$, to hipotezę $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ odrzucamy

Porównanie frakcji

Cecha X_1 ma rozkład dwupunktowy $D(p_1)$
Cecha X_2 ma rozkład dwupunktowy $D(p_2)$

$$H_0 : \; p_1 = p_2$$

Statystyka testowa

$$u_{\mathrm{emp}} = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}}$$

gdzie

$$\hat{p}_1 = \frac{k_1}{n_1}, \; \hat{p}_2 = \frac{k_2}{n_2}, \; \hat{p} = \frac{(k_1 + k_2)}{(n_1 + n_2)}$$

Jeżeli $|u_{\mathrm{emp}}| \geq u_{1-\alpha/2}$, to hipotezę $H_0 : p_1 = p_2$ odrzucamy

MODEL REGRESJI LINIOWEJ

Przyjmujemy następujący model:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

gdzie $\varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n$, są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie $N(0, \sigma^2)$.

MODEL REGRESJI LINIOWEJ

Przyjmujemy następujący model:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

gdzie $\varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n$, są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie $N(0, \sigma^2)$.

Uwagi

- $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$, są zmiennymi losowymi, a $y_1, y_2, \ldots, y_n$ są ich realizacjami.
- Model dotyczy rozkładu warunkowego $Y|X = x$.

Metoda najmniejszych kwadratów

Parametry β_0 oraz β_1 dobieramy tak, aby średniokwadratowy błąd dopasowania, mianowicie $\sum_i e_i^2 = \sum_i (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2$, był minimalny. W ten sposób dobrane parametry oznaczamy przez $\hat{\beta}_0$ oraz $\hat{\beta}_1$. Wyrażają się one wzorami

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_i (x_i - \bar{x}_i)^2}, \ \hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}$$

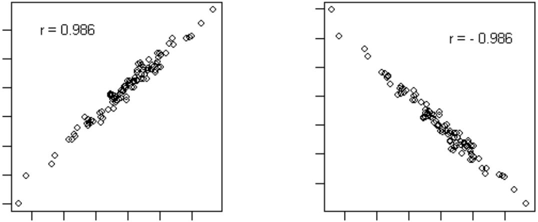
Zachodzi

$$\sum_i (y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i)^2 = (1 - r^2) \sum_i (y_i - \bar{y})^2,$$

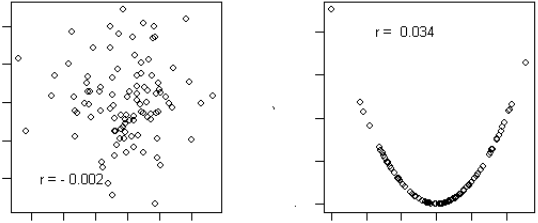
gdzie

$$r = \frac{\sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_i (y_i - \bar{y}_i)^2 \sum_i (x_i - \bar{x})^2}}$$

Współczynnik r jest miernikiem zależności liniowej.



Wartość r jest zawsze z przedziału <-1,1>



Estymacja

- $\hat{\beta}_0, \ \hat{\beta}_1$ są oszacowaniami punktowymi parametrów β_0 oraz β_1.

Estymacja

- Oszacowania przedziałowe dla β_0 oraz β_1 są postaci

$$\beta_1 \in (\hat{\beta}_1 - t(\alpha; n-2)S_{\beta_1}, \hat{\beta}_1 + t(\alpha; n-2)S_{\beta_1})$$

$$\beta_0 \in (\hat{\beta}_0 - t(\alpha; n-2)S_{\beta_0}, \hat{\beta}_0 + t(\alpha; n-2)S_{\beta_0})$$

gdzie

$$S^2_{\beta_1} = \frac{S^2}{\text{var}x}, \quad S^2_{\beta_0} = \frac{S^2}{\text{var}x}\left(\frac{\text{var}x}{n} + \bar{x}^2\right)$$

$$S^2 = \frac{\text{var}y - \hat{\beta}_1 \text{cov}(x,y)}{n-2} = \frac{\text{var}y(1-r^2)}{n-2}$$

Weryfikacja hipotez

$$H_0 : \beta_1 = 0$$
$$H_1 : \beta_1 \neq 0$$

Statystyka testowa

$$F_{\mathsf{emp}} = \frac{\hat{\beta}_1^2}{S_{\beta_1}^2} = \frac{\hat{\beta}_1 \mathsf{cov}(x,y)}{S^2}$$

Hipotezę odrzucamy, jeżeli $F_{\mathsf{emp}} > F(\alpha; 1, n-2)$.

$F(\alpha; 1, n-2)$ jest wartością krytyczną rozkładu F.

Weryfikacja hipotez

$$H_0 : \beta_1 = a$$
$$H_1 : \beta_1 \neq a$$

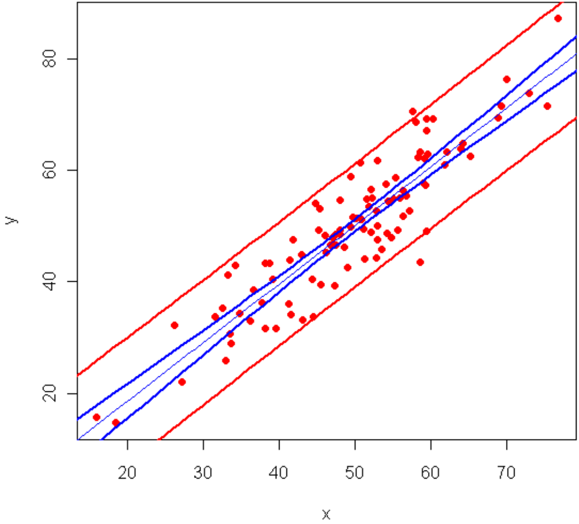
Statystyka testowa

$$t_{\mathsf{emp}} = \frac{\hat{\beta}_1 - a}{S_{\beta_1}}$$

Hipotezę odrzucamy, jeżeli $|t_{\mathsf{emp}}| > t(\alpha; n-2)$.

$t(\alpha; n-2)$ jest wartością krytyczną rozkładu $t-$Studenta.

Obszar ufności dla prostej regresji oraz obszar predykcji



Obszar ufności dla prostej regresji

Obszar ufności dla prostej regresji umożliwia nam wnioskowanie o wartościach średnich zmiennej Y jednocześnie dla wielu wybranych wartości zmiennej X.

$$f(x) \in (\hat{f}(x) - t(\alpha; n-2)S_Y; \hat{f}(x) + t(\alpha; n-2)S_Y)$$

gdzie

$$\hat{f}(x) = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$$

$$S_Y^2 = S^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{(x-\bar{x})^2}{\text{var} x} \right)$$

Obszar predykcji

Obszar predykcji umożliwia nam wnioskowanie o wartościach zmiennej Y jednocześnie dla wielu wybranych wartości zmiennej X.

$$Y(x) \in (\hat{f}(x) - t(\alpha; n-2)S_{Y(x)}; \hat{f}(x) + t(\alpha; n-2)S_{Y(x)})$$

gdzie $Y(x)$ oznacza wartość zmiennej Y dla wybranej wartości x zmiennej X oraz

$$S^2_{Y(x)} = S^2 \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{(x - \bar{x})^2}{\mathsf{var}x}\right)$$