Test χ^2

Oznaczenia

- $X \sim F$ – zmienna losowa X ma rozkład o dystrybuancie F
- $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ – zmienna losowa X ma rozkład normalny o średniej μ oraz wariancji σ^2

$$EX = \mu, \quad D^2(X) = \sigma^2$$

- $X \sim Po(\lambda)$ – zmienna losowa X ma rozkład Poissona z parametrem λ

$$EX = \lambda = D^2(X)$$

Uwaga

Mając do dyspozycji próbę $x_1, x_2, \ldots, x_n$, przyjmujemy

- $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ za oszacowanie wartości oczekiwanej EX
- $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$ za oszacowanie wariancji D^2X

Uwaga

Mając do dyspozycji próbę $x_1, x_2, \ldots, x_n$, przyjmujemy

- $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ za oszacowanie wartości oczekiwanej EX
- $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$ za oszacowanie wariancji D^2X

Mając do dyspozycji szereg rozdzielczy

klasa	przedział klasowy	środek przedziału	liczebność
1	$x_0 - x_1$	$\dot{x}_1$	n_1
2	$x_1 - x_2$	$\dot{x}_2$	n_2
	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
k	$x_{k-1} - x_k$	$\dot{x}_k$	n_k

przyjmujemy (przy $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$)

- $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i\dot{x}_i$ za oszacowanie wartości oczekiwanej EX
- $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k} n_i(\dot{x}_i - \bar{x})^2$ za oszacowanie wariancji D^2X

Test χ^2, weryfikacja hipotezy $H_0 : \ X \sim F$

$$H_0 : X \sim F$$
$$H_1 : X \nsim F$$

Statystyka testowa

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - n_i^t)^2}{n_i^t}$$

Reguła odrzucenia hipotezy (na poziomie istotności α)

$$\chi^2 > \chi^2(\alpha, k-1-u)$$

- $n_i^t = n \cdot p_i$, gdzie $p_i = P\{X \in i - \text{ta klasa}\}$
- u – liczba nieznanych parametrów rozkładu F

Test χ^2, weryfikacja hipotezy $H_0 : \; X \sim F$

$$H_0 : X \sim F$$
$$H_1 : X \nsim F$$

Statystyka testowa

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - n_i^t)^2}{n_i^t}$$

Reguła odrzucenia hipotezy (na poziomie istotności α)

$$\chi^2 > \chi^2(\alpha, k-1-u)$$

Na przykład dla $H_0 : \; X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$\begin{aligned} p_i &= P(X \in (x_{i-1}, x_i]) = F(x_i) - F(x_{i-1}) \\ &= \Phi\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_{i-1} - \mu}{\sigma}\right) \approx \Phi\left(\frac{x_i - \bar{x}}{s}\right) - \Phi\left(\frac{x_{i-1} - \bar{x}}{s}\right) \\ u &= 2 \end{aligned}$$

Φ oznacza dystrybuantę rozkładu $N(0, 1)$

Na poziomie istotności 0.05 zweryfikować hipotezę, że rozkład wagi noworodków jest rozkładem normalnym

Losowa próba licząca $n = 200$ niezależnych obserwacji wagi noworodków dała następujące wyniki:

Waga (kg)	1.0-1.4	1.4-1.8	1.8-2.2	2.2-2.2	2.6-3.0
Liczność	15	45	70	50	20

Test χ^2, weryfikacja hipotezy $H_0 : X \sim F$, przykład

Na poziomie istotności 0.05 zweryfikować hipotezę, że rozkład wagi noworodków jest rozkładem normalnym

Losowa próba licząca $n = 200$ niezależnych obserwacji wagi noworodków dała następujące wyniki:

Waga (kg)	1.0-1.4	1.4-1.8	1.8-2.2	2.2-2.2	2.6-3.0
Liczność	15	45	70	50	20

X – waga wylosowanego noworodka

$$H_0 : X \sim N(\mu, \sigma^2)$$
$$H_1 : X \nsim N(\mu, \sigma^2)$$

Test χ^2, weryfikacja hipotezy $H_0: \ X \sim F$, przykład

Wstęp
Uwagi
Test
Przykład 1
Przykład 2
Test
Przykłady

Na poziomie istotności 0.05 zweryfikować hipotezę, że rozkład wagi noworodków jest rozkładem normalnym

Losowa próba licząca $n = 200$ niezależnych obserwacji wagi noworodków dała następujące wyniki:

Waga (kg)	1.0-1.4	1.4-1.8	1.8-2.2	2.2-2.2	2.6-3.0
Liczność	15	45	70	50	20

i	$(x_{i-1}, x_i]$	$\dot{x}_i$	n_i	$n_i \cdot \dot{x}_i$	$n_i(\dot{x}_i - \bar{x})^2$	p_i	$n_i^t = n \cdot p_i$
1	$(-\infty, 1.4]$	1.2	15	18	10.3335	0.073	14.6
2	$(1.4, 1.8]$	1.6	45	72	8.3205	0.225	45.0
3	$(1.8, 2.2]$	2	70	140	0.0630	0.355	70.9
4	$(2.2, 2.6]$	2.4	50	120	6.8450	0.253	50.6
5	$(2.6, \infty)$	2.8	20	56	11.8560	0.094	18.9
	suma		n=200	406	37.4200	1	200

$$\bar{x} = \frac{406}{200} = 2.03, \ \ s^2 = \frac{1}{200-1} \cdot 37.42 = 0.188040201, \ \ s = 0.433636024 \approx 0.43$$

$$p_1 = \Phi\left(\frac{1.4-2.03}{0.43}\right), \ \ p_2 = \Phi\left(\frac{1.8-2.03}{0.43}\right) - \Phi\left(\frac{1.4-2.03}{0.43}\right), \ p_5 = 1 - \Phi\left(\frac{2.6-2.03}{0.43}\right)$$

Test χ^2, weryfikacja hipotezy $H_0: \; X \sim F$, przykład

Na poziomie istotności 0.05 zweryfikować hipotezę, że rozkład wagi noworodków jest rozkładem normalnym

Losowa próba licząca $n = 200$ niezależnych obserwacji wagi noworodków dała następujące wyniki:

Waga (kg)	1.0-1.4	1.4-1.8	1.8-2.2	2.2-2.2	2.6-3.0
Liczność	15	45	70	50	20

i	n_i	n_i^t	$\frac{(n_i - n_i^t)^2}{n_i^t}$
1	15	14.6	0.011
2	45	45.0	0.000
3	70	70.9	0.011
4	50	50.6	0.007
5	20	18.9	0.064
		suma	$\chi^2 = 0.093$

$$k - 1 - u = 5 - 1 - 2 = 2$$

Ponieważ $\chi^2 < \chi^2(0.05, 2) = 5.9915$, brak podstaw do odrzucenia hipotezy.

Test χ^2, weryfikacja hipotezy $H_0: X \sim F$, przykład

Na poziomie istotności 0.05 zweryfikować hipotezę, że rozkład ten jest rozkładem Poissona

Zaobserwowane liczby artefaktów w badaniu EKG w czasie 24 h (Holter) dla grupy chorych przedstawiono w poniższym szeregu

Liczba artefaktów	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Liczba chorych	28	100	145	125	95	60	35	10	5	5	2

Test χ^2, weryfikacja hipotezy $H_0: \ X \sim F$, przykład

Na poziomie istotności 0.05 zweryfikować hipotezę, że rozkład ten jest rozkładem Poissona

Zaobserwowane liczby artefaktów w badaniu EKG w czasie 24 h (Holter) dla grupy chorych przedstawiono w poniższym szeregu

Liczba artefaktów	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Liczba chorych	28	100	145	125	95	60	35	10	5	5	2

X – liczba artefaktów u wylosowanego pacjenta

$$H_0 : X \sim Po(\lambda)$$
$$H_1 : X \nsim Po(\lambda)$$

W tym przykładzie F oznacza dystrybuantę rozkładu $Po(\lambda)$. Ponieważ parametr λ jest nieznany, zostanie zastąpiony przez $\bar{x} = 3.0$

Test χ^2, weryfikacja hipotezy $H_0: \ X \sim F$, przykład

Na poziomie istotności 0.05 zweryfikować hipotezę, że rozkład ten jest rozkładem Poissona

Zaobserwowane liczby artefaktów w badaniu EKG w czasie 24 h (Holter) dla grupy chorych przedstawiono w poniższym szeregu

Liczba artefaktów	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Liczba chorych	28	100	145	125	95	60	35	10	5	5	2

Klasa	n_i	p_i	n_i^t	$\frac{(n_i-n_i^t)^2}{n_i^t}$
0	28	0.050	30.37	0.185
1	100	0.149	91.11	0.867
2	145	0.224	136.67	0.508
3	125	0.224	136.67	0.996
4	95	0.168	102.50	0.549
5	60	0.101	61.50	0.037
6	35	0.050	30.75	0.587
7	10	0.022	13.18	0.767
8	5	0.008	4.94	0.001
9	5	0.003	1.65	6.824
≥ 10	2	0.67	0.61	2.620
suma	610	1	610	13.94

$$k - 1 - u = 11 - 1 - 1 = 9$$

Ponieważ $\chi^2 < \chi^2(0.05, 9) = 16.919$, brak podstaw do odrzucenia hipotezy.

Test χ^2, weryfikacja hipotezy $H_0: \; X, Y$ niezależne

Hipoteza

$$H_0 : \text{Cechy } X,\ Y \text{ są niezależne}$$

α – poziom istotności
Statystyka testowa:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m} \frac{(n_{ij} - n_{ij}^t)^2}{n_{ij}^t}$$

Jeżeli $\chi^2 > \chi^2(\alpha; (k-1)(m-1))$, to hipotezę H_0 odrzucamy

Postać danych

Klasy cechy Y	Klasy cechy X: 1	2	...	m	Suma
1	n_{11}	n_{12}	...	n_{1m}	$n_{1\cdot}$
2	n_{21}	n_{22}	...	n_{2m}	$n_{2\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
k	n_{k1}	n_{k2}	...	n_{km}	$n_{k\cdot}$
Suma	$n_{\cdot 1}$	$n_{\cdot 2}$	...	$n_{\cdot m}$	n

$$n_{ij}^t = \frac{n_{i\cdot} n_{\cdot j}}{n}$$

Eksperyment 1

Sumaryczne liczebności z kolumn są ustalone

Przykład

Chcemy porównać skuteczność dwóch terapii w leczeniu choroby oczu. Do każdej terapii przydzielamy losowo po 28 pacjentów. Po zakończonych terapiach zliczamy zdrowych i chorych pacjentów.

Choroba	Terapia 1	Terapia 2
Nie ustąpiła	14	15
Ustąpiła	14	13
Ogółem	28	28

- H_0 : Skuteczność leczenia nie zależy od rodzaju terapii
- $\chi^2 = 0.0715198$
- $\chi^2(0.05, 1) = 3.841459$

Eksperyment 2

Ustalona jest całkowita liczba obserwacji

Przykład

Chcemy zbadać, czy poziom hormonów u pacjenta ma wpływ na wynik leczenia. W tym celu wybieramy losowo stu pacjentów, z których część ma niski poziom hormonów, a część wysoki. Po zakończeniu procedury leczenia, tworzymy tabelkę:

Poziom hormonu	Wynik leczenia: Negatywny	Wynik leczenia: Pozytywny	Suma
Niski	18	65	
Wysoki	10	7	
			100

- H_0 : Wynik leczenia nie zależy od poziomu hormonu
- $\chi^2 = 9.652616$
- $\chi^2(0.05, 1) = 3.841459$

Eksperyment 3

Żadne wartości w tabelce nie są z góry ustalone

Przykład

Badamy potomstwo pewnego wodnego organizmu. Część potomstwa trafia losowo do grupy kontrolnej, a część do grupy ryzyka. W obu grupach po zakończeniu eksperymentu notujemy liczbę żeńskich i męskich osobników, które przetrwały osiągając dojrzałość. Początkowa liczba osobników nie jest znana.

	Osobniki	
Grupa	żeńskie	męskie
kontrolna	363	103
ryzyka	376	182

- H_0 : Odporność na czynnik ryzyka nie zależy od płci
- $\chi^2 = 13.97411$
- $\chi^2(0.05, 1) = 3.841459$

Eksperyment 4

Badania retrospektywne

Przykład

Podejrzewamy, że wykonywanie pewnej pracy może być przyczyną choroby, która ujawnia się dopiero po wielu latach. Aby zweryfikować te podejrzenia, wybieramy do badań dwie grupy osób. Pierwsza grupa składa się z 50 zdrowych osób, a druga z 20 chorych. Sprawdzamy, które osoby wykonywały tę pracę.

	Praca		Suma
Choroba	Nie	Tak	
Nie	12	38	50
Tak	2	18	20

- H_0 : Choroba nie zależy od wykonywanej pracy
- $\chi^2 = 1.71$
- $\chi^2(0.05, 1) = 3.841459$

Uwaga: Liczba obserwacji w jednej klatce jest równa 2 (mniejsza od 5). Może to stanowić problem przy stosowaniu testu Chi-kwadrat.

Przykład

W leczeniu pewnej choroby stosuje się zamiennie dwa preparaty. Wiadomo, że mogą one powodować uszkodzenie wątroby. Chcąc porównać szkodliwość obu preparatów wykonujemy następujący eksperyment. Z grupy pacjentów, którym podano pierwszy preparat losujemy osoby do momentu uzyskania pięciu przypadków uszkodzenia wątroby. To samo robimy w stosunku do pacjentów, którzy otrzymali drugi preparat. Wyniki losowania przedstawiamy w tabelce.

	Preparat	
Uszkodzenie	pierwszy	drugi
Tak	5	5
Nie	53	312

	X		
Y	0	1	Suma
0	d	c	r
1	b	a	s
Suma	m	n	N

$$W = \frac{(ad - bc)^2(c+d)}{N(a+b)cd}$$

Eksperyment 6

Przykład

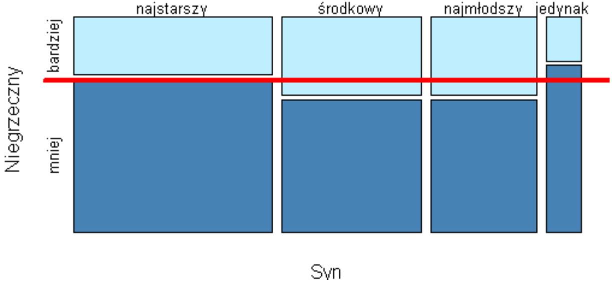
1137 chłopców sklasyfikowano na dwie kategorie: bardzie i mniej niegrzecznych. Następnie sprawdzono, w jakiej kolejności się rodzili.

Niegrzeczny	Najstarszy	Środkowy	Najmłodszy	Jedynak	Suma
bardziej	127	123	93	17	360
mniej	345	209	158	65	777
Suma	472	332	251	82	1137

- H_0 : Prawomyślność nie zależy od tego, czy jest się starszym/młodszym rodzeństwem
- $\chi^2 = 17.28164$
- $\chi^2(0.05, 3) = 7.814728$

Rozkład procentowy

Niegrzeczny	Najstarszy	Środkowy	Najmłodszy	Jedynak	Suma
bardziej	26.9%	37.0%	37.1%	20.7%	31.7%
mniej	73.1%	63.0%	62.9%	79.3%	68.3%
Suma	100%	100%	100%	100%	100%



Rozkład procentowy

Niegrzeczny	Najstarszy	Środkowy	Najmłodszy	Jedynak	Suma
bardziej	26.9%	37.0%	37.1%	20.7%	31.7%
mniej	73.1%	63.0%	62.9%	79.3%	68.3%
Suma	100%	100%	100%	100%	100%

Liczebności oczekiwane

Niegrzeczny	Najstarszy	Środkowy	Najmłodszy	Jedynak	Suma
bardziej	149.4	105.1	79.5	26.0	360
mniej	322.6	226.9	171.5	56.0	777
Suma	472	332	251	82	1137

$$149.4 = 0.371 \cdot 472$$
$$105.1 = 0.371 \cdot 332$$
$$56.0 = 0.683 \cdot 82$$

Rozkład procentowy

Niegrzeczny	Najstarszy	Środkowy	Najmłodszy	Jedynak	Suma
bardziej	26.9%	37.0%	37.1%	20.7%	31.7%
mniej	73.1%	63.0%	62.9%	79.3%	68.3%
Suma	100%	100%	100%	100%	100%

Liczebności oczekiwane

Niegrzeczny	Najstarszy	Środkowy	Najmłodszy	Jedynak	Suma
bardziej	149.4	105.1	79.5	26.0	360
mniej	322.6	226.9	171.5	56.0	777
Suma	472	332	251	82	1137

$$\chi^2 = \sum \frac{(Zaobserwowana - Oczekiwana)^2}{Oczekiwana}$$

$$\chi^2 = \frac{(127-149.4)^2}{149.4} + \frac{(123-105.1)^2}{105.1} + \ldots + \frac{(82-56.0)^2}{56.0}$$

$$\chi^2 = 17.2816, \quad df = 3, \quad p - value = 0.0006185$$