1 Całka oznaczona

1.1 Definicja

Całka oznaczona

- Niech $f(x)$ oznacza funkcję ograniczoną na $< a, b >$.
- Niech $P_1,\ P_2, \dots,\ P_m, \dots$ będą różnym podziałami przedziału $< a, b >$. Podział P_m jest osiągnięty przy pomocy $n_m - 1$ liczb $x_1,\ x_2,\ \dots, x_{n_m - 1}$, przy czym

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n_m - 1} < x_{n_m} = b.$$

- Przedziały $< x_{i-1}, x_i >$, gdzie $i = 1, 2, \dots, n_m$, nazywamy przedziałami cząstkowymi podziału P_m. Długości ich $x_i - x_{i-1}$ będziemy oznaczali przez Δx_i
- Niech $\delta_m = \max\limits_i \Delta x_i$ oraz

$$S_m = \sum_{i=1}^{n_m} f(c_i) \Delta x_i,$$

  przy podziale P_m oraz dowolnie wybranych punktów $c_i \in < x_{i-1}, x_i >$, $i = 1, 2, \dots,\ n_m$.
- Ciąg podziałów nazywamy *normalnym ciągiem podziałów*, jeżeli $\lim\limits_{m \to \infty} \delta_m = 0$

Definicja
Jeżeli ciąg $\{S_m\}$ dla $m \to \infty$ jest zbieżny i do tej samej granicy przy każdym normalnym ciągu podziałów, niezależnie od wyboru punktów c_i, to funkcję $f(x)$ nazywamy *funkcją całkowalną* w przedziale $< a, b >$. Granicę ciągu $\{S_m\}$ nazywamy *całką oznaczoną* funkcji $f(x)$ w granicach od a do b i oznaczamy symbolem

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

1.2 Własności

Własności

1. Funkcja ciągła w przedziale domkniętym jest całkowalna

2. Funkcja ogranicznona w przedziale domkniętym oraz ciągła w nim z wyjątkiem co najwyżej skończonej liczby liczby punktów jest całkowalna.

3. Jeżeli $a \le b \le c$, to
$$\int\limits_a^c f(x)\,dx = \int\limits_c^b f(x)\,dx + \int\limits_b^c f(x)\,dx$$

4. Stały czynnik można wyłączyć przed znak całki
$$\int\limits_a^b kf(x)\,dx = k\int\limits_a^b f(x)\,dx$$

5. Całka sumy równa się sumie całek
$$\int\limits_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_a^b g(x)\,dx$$

6. Jeżeli funkcja $f(x)$ jest ciągła w przedziale $< a, b >$, to zachodzi
$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a),$$
dla pewnego c z przedziału $< a, b >$

7. Jeżeli funkcja $f(t)$ jest ciągła w przedziale $< a, b >$, to funkcja
$$h(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$
jest ciągła i różniczkowalna względem zmiennej x w przedziale $< a, b >$ i w każdym punkcie tego przedziału zachodzi związek $h'(x) = f(x)$.

8. ZWIĄZEK MIĘDZY CAŁKĄ OZNACZONĄ A NIEOZNACZONĄ. Jeżeli przez $F(x)$ oznaczymy funkcję pierwotną funkcji $f(x)$, ciągłej w przedziale $< a, b >$, tzn. jeżeli $F(x)' = f(x)$, to ma miejsce wzór

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Przykłady

- Ponieważ $\int x\sin(x^2)\,dx = \frac{-\cos(x^2)}{2} + C$, mamy

$$\int_0^{\pi/2} x\sin(x^2)\,dx = \left[\frac{-\cos(x^2)}{2}\right]_0^{\pi/2} = \left(\frac{-\cos((\pi/2)^2)}{2}\right) - \frac{-\cos(0^2)}{2}$$

- Ponieważ $\int e^x x\,dx = e^x(-1+x) + C$, mamy

$$\int_2^3 e^x x\,dx = [e^x(-1+x)]_2^3 = e^3(-1+3) - e^2(-1+2)$$

9. Jeżeli u i v są funkcjami zmiennej x mającymi ciągłą pochodną, to

$$\int_a^b u\,dv = [uv]_a^b - \int_a^b vdu.$$

Jest to wzór na całkowanie przez części dla całek ozncczonych.

Przykłady

- $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} x\sin x\,dx = -\int_0^{\frac{1}{2}\pi} xd(\cos x) = [-x\cos x]_0^{\frac{1}{2}\pi} + \int_0^{\frac{1}{2}\pi} cosx\,dx = [\sin x]_0^{\frac{1}{2}\pi} = 1$

- $\int_2^5 \ln(x)\,dx = \int_2^5 x'\ln(x)\,dx = [x\ln(x)]_2^5 - \int_2^5 x\cdot\frac{1}{x}\,dx = = 5\ln(5) - 2\ln(2) - (5-2)$

Twierdzenie 1 (O całkowaniu przez podstawienie)**.** *Jeżeli*

- *funkcja* $\varphi : \langle\alpha, \beta\rangle \to \langle a, b\rangle$ *jest „na" i ma ciągłą pochodną na* $\langle\alpha, \beta\rangle$
- $\varphi(\alpha) = a,\ \varphi(\beta) = b$

- *funkcja f jest ciągła na przedziale $\langle a, b\rangle$*

to

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

Przykład

$$\int\limits_0^1 x\sqrt{1+x}\,dx = \int\limits_1^2 (t-1)\sqrt{t}\,dt = \int\limits_1^2 t^{3/2}\,dt - \int\limits_1^2 t^{1/2}\,dt$$

$$\text{dla } \varphi(t) = t-1, \quad \varphi'(t) = 1$$

2 Całka niewłaściwa

2.1 Całki funkcji nieograniczonych

Definicja
Jeżeli funkcja $f(x)$ jest ograniczona i całkowalna w każdym przedziale $a \leq x \leq c-h,\ h > 0$, oraz w każdym przedziale $c+k \leq x \leq b,\ k > 0$, i jeżeli istnieją granice

$$\lim_{h\to 0^+}\int_a^{c-h} f(x)\,dx \quad \text{oraz} \quad \lim_{k\to 0^+}\int_{c+k}^{b} f(x)\,dx,$$

to sumę tych granic nazywamy całką niewłaściwą funkcji $f(x)$ w przedziale $< a, b >$ i oznaczamy symbolem

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

- W podanej definicji chodzi o funkcje, które w każdym otoczeniu $(c-\delta, c+\delta),\ \delta > 0$, są nieogranczone. W punkcie c funkcja może nawet nie być określona. Jeżeli przynajmniej jedna z granic nie istnieje, to mówimy, że całka jest rozbieżna.

- Jeżeli punktem nieograniczoności jest jeden z końców przedziału $< a, b >$, to przez całkę niewłaściwą rozumiemy odpowiednio

$$\lim_{h\to 0^+} \int_{a+h}^{b} f(x)\,dx \quad \text{albo} \quad \lim_{k\to 0^+} \int_{a}^{b-k} f(x)\,dx,$$

  Przykład

  – $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{x}}\,dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^3 \frac{dx}{\sqrt{x}}\,dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \left(2\sqrt{3} - 2\sqrt{\varepsilon}\right)$

2.2 Całki oznaczone w przedziale nieskończonym

Definicja
Jeżeli funkcja $f(x)$ jest ograniczona i całkowalna w każdym przedziale skończonym $a \le x \le v$ (a – ustalone, v – dowolne) oraz istnieje granica

$$\lim_{v\to\infty} \int_a^v f(x)\,dx,$$

to granicę tę nazywamy całką niewłaściwą funkcji $f(x)$ w przedziale $a \le x < \infty$ i oznaczamy symbolem

$$\int_a^\infty f(x)\,dx.$$

Analogicznie określa się znaczenie symbolu $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$ jako granicę $\lim\limits_{u\to-\infty} \int_u^b f(x)\,dx$.

Przykład
Chcemy obliczyć całkę $\int_1^\infty \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right)^2\,dx$

Najpierw możemy wyznaczyć całkę nieoznaczoną $\int \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right)^2\,dx = -\frac{4}{x} - \frac{2}{x^2} - \frac{1}{3x^3}$,

Zatem zgodnie z podaną definicją $\int_1^\infty \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right)^2\,dx = \lim_{v\to\infty} \left(-\frac{4}{v} - \frac{2}{v^2} - \frac{1}{3v^3} - (-4 - 2 - 1/3)\right)$

3 Całka wielokrotna

3.1 Całka dwukrotna

Całka dwukrotna

Twierdzenie 2 (O zamianie całki podwójnej na iterowaną)**.** *Niech funkcja f będzie ciągła na prostokącie $A =< a, b > \times < c, d >$. Wtedy*

$$\int_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy$$

Twierdzenie 3 (Całka podwójna z funkcji o rozdzielonych zmiennych)**.** *Jeżeli*

- *funkcja g jest ciągła na $< a, b >$*
- *funkcja h jest ciągła na $< c, d >$*

to

$$\int_A g(x)h(y)\,dx\,dy = \left(\int_a^b g(x)\,dx \right) \cdot \left(\int_c^d h(y)\,dy \right),$$

gdzie $A =< a, b > \times < c, d >$.

Definicja 1 (Obszary normalne)**.**

- *Obszarem normalnym względem osi OX nazywamy obszar domknięty postaci:*

  $$\{(x,y)|\ a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\}$$

  gdzie funkcje g, h są ciągłe na $< a, b >$ oraz $g(x) < h(x)$ dla każdego $x \in (a, b)$

- *Obszarem normalnym względem osi OY nazywamy obszar domknięty postaci:*

  $$\{(x,y)|\ c \leq y \leq d, g(y) \leq x \leq h(y)\}$$

  gdzie funkcje g, h są ciągłe na $< c, d >$ oraz $g(y) < h(y)$ dla każdego $y \in (c, d)$

Twierdzenie 4 (Całki iterowane po obszarach normalnych)**.**

- *Jeżeli funkcja f jest ciągła na obszarze normalnym*

$$D = \{(x,y) |\ a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\}$$

to

$$\int_D f(x,y)\, dx\, dy = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\, dy \right) dx$$

- *Jeżeli funkcja f jest ciągła na obszarze normalnym*

$$D = \{(x,y) |\ c \leq y \leq d, g(y) \leq x \leq h(y)\}$$

to

$$\int_D f(x,y)\, dx\, dy = \int_c^d \left(\int_{g(y)}^{h(y)} f(x,y)\, dx \right) dy$$

Definicja 2 (Współrzędne biegunowe)**.** *Położenie punktu na płaszczyźnie można opisać za pomocą pary (ϱ, φ), gdzie*

- *φ oznacza miarę kąta między dodatnią częścią osi OX a promieniem wodzącym punktu, $0 \leq \varphi < 2\pi$*
- *ϱ oznacza odległość punktu od początku układu współrzędnych, $0 \leq \varrho < \infty$*

Twierdzenie 5 (Współrzędne biegunowe w całce podwójnej)**.** *Niech*

- *obszar Δ we współrzędnych biegunowych będzie obszarem normalnym*
- *funkcja f będzie ciągła na obszarze D, który jest obrazem obszaru Δ przy przekształceniu biegunowym;*

$$D = B(\Delta) = \{(\varrho\cos(\varphi), \varrho\sin(\varphi)) |\ (\varrho, \varphi) \in \Delta\}$$

Wtedy

$$\int_D f(x,y)\, dxdy = \int_\Delta f(\varrho\cos(\varphi), \varrho\sin(\varphi))\varrho\, d\varrho\, d\varphi$$