

1 Całka nieoznaczona

1.1 Definicja

Całka nieoznaczona

Definicja 1. Niech $f(x)$ będzie funkcją określoną w pewnym przedziale I . Każdą funkcję $F(x)$ różniczkowalną w przedziale I i spełniającą w całym przedziale związek

$$F'(x) = f(x)$$

nazywamy funkcją pierwotną funkcji $f(x)$ w przedziale I .

Przykłady

- funkcją pierwotną funkcji $\cos x$ w przedziale $(-\infty, \infty)$ jest $\sin x$, bo $(\sin x)' = \cos x$
- funkcją pierwotną funkcji $1 - 2x$ jest $x - x^2$, bo $(x - x^2)' = 1 - 2x$
- $\int \cos x \, dx = \sin x$, $\int x^2 \, dx = \frac{1}{3}x^3$, $\int 1 \, dx = \int dx = x$

1.2 Własności

Funkcję pierwotną nazywamy również **całką nieoznaczoną** i oznaczamy przez

$$\int f(x) \, dx$$

W myśl określenia całki mamy:

$$\left[\int f(x) \, dx \right]' = f(x) \quad \text{oraz} \quad \int F'(x) \, dx = F(x).$$

Obliczanie, czyli wyznaczanie całki nazywamy całkowaniem funkcji. **Zauważmy, że** gdy $F(x)$ jest całką funkcji $f(x)$, to suma $F(x) + c$, gdzie c jest stałą dowolną, jest również całką, bo $[F(x) + c]' = F'(x) = f(x)$.

I odwrotnie: Dwie różne całki $F(x)$ oraz $G(x)$ tej samej funkcji $f(x)$ różnią się w całym przedziale o stałą.

Istotnie, jeżeli $F'(x) = f(x)$ oraz $G'(x) = f(x)$, to pochodna różnicy $G(x) - F(x)$ równa się w całym przedziale 0, zatem

$$F(x) - G(x) = c$$

1.3 Podstawowe wzory

$$\begin{aligned} \int x^a dx &= \frac{x^{1+a}}{1+a} + c, \text{ dla } a \neq -1, & \int \sin x dx &= -\cos x + c \\ \int \frac{1}{x} dx &= \ln |x| + c, & \int \cos x dx &= \sin x + c, \\ \int e^x dx &= e^x + c, & \int \frac{1}{\cos^2 x} dx &= \tan x + c, \\ \int a^x dx &= \frac{a^x}{\ln a} + c, & \int \frac{1}{\sin^2 x} dx &= -\operatorname{ctg} x + c \\ \int \frac{1}{1+x^2} dx &= \arctan x + c = -\operatorname{arccot} x + c' \\ \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \arcsin x + c = -\arccos x + c' \end{aligned}$$

Niech $f(x)$ oraz $g(x)$ będą funkcjami mającymi całki w pewnym przedziale. Wówczas

- suma $f + g$ ma w tym przedziale całkę oraz

$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

- jeżeli a jest stałą, to

$$\int a f(x) dx = a \int f(x) dx$$

- jeżeli dodatkowo f, g mają ciągłe pochodne, to

$$\int f(x) g'(x) dx = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x) dx$$

Uwaga: można spotkać się z oznaczeniem: $dg(x) = g'(x) dx$ lub krótko $dg = g' dx$. Wtedy wzór ten zapisujemy w postaci $\int f dg = fg - \int g df$

Całkowanie przez podstawienie. Niech $f(x)$ będzie funkcją ciągłą w przedziale (a, b) i niech $\int f(x) dx = F(x)$. Niech dalej $x = \phi(t)$ będzie funkcją ciągłą w przedziale (α, β) , spełniającą w nim nierówność $a < \phi(t) < b$ i mającą ciągłą pochodną $\phi'(t)$. Funkcja złożona $F[\phi(t)]$ ma wówczas w przedziale (α, β) pochodną

$$F'[\phi(t)]\phi'(t) = f[\phi(t)]\phi'(t), \text{ bo } F'(x) = f(x),$$

zatem

$$\int f[\phi(t)]\phi'(t) dt = F[\phi(t)].$$

Stąd otrzymujemy

$$\int f(x) dx = \int f[\phi(t)]\phi'(t) dt \text{ dla } x = \phi(t)$$

Przykłady (stała będzie pomijana)

- $a \neq 0$, $\int \frac{dx}{ax+b}$. Przyjmujemy $ax + b = t$, zatem $x = \frac{t-b}{a}$, skąd $dx = \frac{dt}{a}$.
Zatem

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \int \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{a} dt = \frac{1}{a} \int \frac{1}{t} dt = \frac{1}{a} \ln |t| = \frac{1}{a} \ln |ax+b|$$

- $\int x\sqrt{1+x^2} dx$. Przyjmijmy $1+x^2 = t$, skąd $2x dx = dt$, zatem

$$\int x\sqrt{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int \sqrt{1+x^2} \cdot 2x dx = \frac{1}{2} \int \sqrt{t} dt = \frac{1}{3} t^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3} (\sqrt{1+x^2})^2$$

- Całka ułamka $\int \frac{\phi'(x)}{\phi(x)} dx$, w którym licznik jest pochodną mianownika, przekształca się po podstawieniu $\phi(x) = t$ na całkę $\int \frac{dt}{t} = \ln |t|$.
- Całka iloczynu $\int [\phi(x)]^a \phi'(x) dx$, gdzie $a \neq -1$, przekształca się po podstawieniu $\phi(x) = t$ na całkę $\int t^a dt$.

Wynikają stąd następujące wzory:

$$\int \frac{\phi'(x)}{\phi(x)} dx = \ln |\phi(x)|,$$

$$\int [\phi(x)]^a \phi'(x) dx = \frac{[\phi(x)]^{a+1}}{a+1} \text{ dla } a \neq -1$$

Wzory rekurencyjne. Całki

$$I_n = \int \frac{dx}{(1+x^2)^n}, \quad J_n = \int \sin^n x \, dx, \quad \int \cos^n x \, dx$$

umiemy obliczyć dla $n = 1$. Dla $n > 1$ można je obliczyć stosując wzory rekurencyjne:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(1+x^2)^n} &= \frac{1}{2n-2} \frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} \int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}}, \\ \int \sin^n x \, dx &= -\frac{1}{n} \cos x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x \, dx, \\ \int \cos^n x \, dx &= \frac{1}{n} \sin x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x \, dx \end{aligned}$$

Pierwszy wzór rekurencyjny

$$\begin{aligned} I_n &= \int \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^n} \, dx = \int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}} - \int \frac{x}{2} \frac{2x \, dx}{(1+x^2)^n} = \\ &= I_{n-1} - \int \frac{x}{2} d\left(-\frac{1}{(n-1)(1+x^2)^{n-1}}\right) \end{aligned}$$

Całkując ostatnią całkę przez części otrzymujemy

$$\begin{aligned} I_n &= I_{n-1} + \frac{x}{(2n-2)(1+x^2)^{n-1}} - \int \frac{dx}{(2n-2)(1+x^2)^{n-1}} \\ I_n &= I_{n-1} + \frac{x}{(2n-2)(1+x^2)^{n-1}} - \frac{1}{2n-2} I_{n-1} \\ &= \frac{x}{(2n-2)(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1} \end{aligned}$$

Drugi wzór rekurencyjny

$$\text{Zaczynamy od postaci: } \sin^n x \, dx = \sin^{n-1} x \, d(-\cos x)$$

Trzeci wzór rekurencyjny otrzymuje się podobnie do drugiego

Przykłady

- Przy podstawieniu $\sin x = t$ mamy

$$\int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = \int \frac{-dt}{t} = -\ln |t| = -\ln |\cos x|$$

- Najpierw przez części, potem podstawienie $1 - x^2 = t$

$$\begin{aligned}\int \arcsin x \, dx &= x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = x \arcsin x + \int \frac{dt}{2\sqrt{t}} = \\ &= x \arcsin x + \sqrt{t} = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}\end{aligned}$$

Przykłady

- Podstawienie $x = \sqrt{at}$ (wtedy $dx = \sqrt{a}dt$)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a-x^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t = \arcsin \frac{x}{\sqrt{a}}$$

- Podstawienie $x + \sqrt{a+x^2} = t$. Dla tego podstawienia zachodzi

$$\left(1 + \frac{x}{\sqrt{a+x^2}}\right) dx = \frac{x + \sqrt{a+x^2}}{\sqrt{a+x^2}} dx = \frac{dx}{\sqrt{a+x^2}} t = dt$$

Zatem

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+x^2}} = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| = \ln |x + \sqrt{a+x^2}|$$

•

$$\begin{aligned}\int \sqrt{a-x^2} \, dx &= \int \frac{a-x^2}{\sqrt{a-x^2}} \, dx \\ &= \int \frac{a}{\sqrt{a-x^2}} \, dx + \int x \frac{-x}{\sqrt{a-x^2}} \, dx = \\ &= a \int \frac{dx}{\sqrt{a-x^2}} + \int x d\sqrt{a-x^2} = \\ &= a \arcsin \frac{x}{\sqrt{a}} + x\sqrt{a-x^2} - \int \sqrt{a-x^2} \, dx\end{aligned}$$

Zatem

$$\int \sqrt{a-x^2} \, dx = \frac{1}{2} \left(a \arcsin \frac{x}{\sqrt{a}} + x\sqrt{a-x^2} \right)$$

- Wyznaczamy całkę $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx$. Na początek zauważamy, że

$$\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n} dx = \frac{A}{2} \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n} + \frac{C}{(x^2+px+q)^n}, \text{ gdzie } C = B - \frac{Ap}{2}$$

Zatem

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx = \frac{A}{2} \int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n} dx + C \int \frac{1}{(x^2+px+q)^n} dx$$

Pierwsza całka po prawej stronie równości jest postaci

$$\int [\phi(x)]^{-n} \phi'(x) dx \quad \text{dla } \phi(x) = x^2 + px + q$$

zatem wiadomo już, jak ją policzyć

Trzeba pokazać, jak wyznaczyć $\int \frac{1}{(x^2+px+q)^n} dx$. W tym celu podstawiamy

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right) = at^2 + a,$$

gdzie $q - \frac{p^2}{4} = a$ oraz $x + \frac{p}{2} = \sqrt{a}t$. Wówczas $dx = \sqrt{a} dt$. Zatem

$$\int \frac{1}{(x^2+px+q)^n} dx = \int \frac{\sqrt{a} dt}{a^n(1+t^2)^n} = \frac{1}{a^{n-1/2}} \int \frac{dt}{(1+t^2)^n}$$

Ostatnia całka jest równa $\arctan t$ dla $n = 1$, a dla $n > 1$, stosujemy wzór rekurencyjny.

Do domu. Stosując opisany powyżej sposób pokazać, że

$$\begin{aligned} \int \frac{-5+2x}{5-3x+x^2} dx &= \frac{-4 \arctan\left(\frac{-3+2x}{\sqrt{11}}\right)}{\sqrt{11}} + \ln(5-3x+x^2) \\ \int \frac{3+2x}{(5+3x+x^2)^2} dx &= -\left(\frac{1}{5+3x+x^2}\right) \end{aligned}$$

Całki, których nie można wyrazić za pomocą funkcji elementarnych

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \int \frac{\sin x}{x} dx, \quad \int e^{-x^2} dx$$