

1 Badanie funkcji jednej zmiennej

1.1 Ekstrema

Badanie funkcji jednej zmiennej

Definicja 1 (Minimum lokalne). *Funkcja f ma w $x_0 \in \mathbb{R}$ minimum lokalne jeżeli*

$$\bigvee_{\delta > 0} \bigwedge_{x \in S(x_0, \delta)} f(x) \geq f(x_0)$$

Uwaga 1. *Zauważmy, że f musi być określona w otoczeniu punktu x_0 . Zbiór $S(x_0, \delta) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < |x - x_0| < \delta\}$*

Definicja 2 (Maksimum lokalne). *Funkcja f ma w $x_0 \in \mathbb{R}$ maksimum lokalne jeżeli*

$$\bigvee_{\delta > 0} \bigwedge_{x \in S(x_0, \delta)} f(x) \leq f(x_0)$$

Definicja 3 (Minimum lokalne właściwe). *Funkcja f ma w $x_0 \in \mathbb{R}$ minimum lokalne właściwe jeżeli*

$$\bigvee_{\delta > 0} \bigwedge_{x \in S(x_0, \delta)} f(x) > f(x_0)$$

Definicja 4 (Maksimum lokalne właściwe). *Funkcja f ma w $x_0 \in \mathbb{R}$ maksimum lokalne właściwe jeżeli*

$$\bigvee_{\delta > 0} \bigwedge_{x \in S(x_0, \delta)} f(x) < f(x_0)$$

Warunek konieczny istnienia ekstremum

Twierdzenie 1. *Jeżeli funkcja f ma*

1. *ekstremum lokalne w punkcie x_0*
2. *pochodną w punkcie x_0*

to $f'(x_0) = 0$

Uwaga 2. *Funkcja może mieć ekstrema tylko w punktach, w których jej pochodna równa jest zero, albo w punktach, w których jej pochodna nie istnieje*

Warunek wystarczający istnienia ekstremum

Twierdzenie 2. *Jeżeli funkcja f spełnia warunki:*

1. $f'(x_0) = 0$
2. $\bigvee_{\delta > 0} \begin{cases} f'(x_0) > 0 & \text{dla } x_0 - \delta < x < x_0 \\ f'(x_0) < 0 & \text{dla } x_0 < x < x_0 + \delta \end{cases}$

to w punkcie x_0 ma maksimum lokalne właściwe

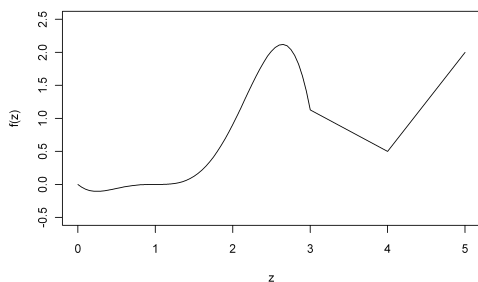
Twierdzenie 3. *Jeżeli funkcja f spełnia warunki:*

1. $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$
2. $f^{(n)}(x_0) < 0$
3. n jest liczbą parzystą, gdzie $n \geq 2$

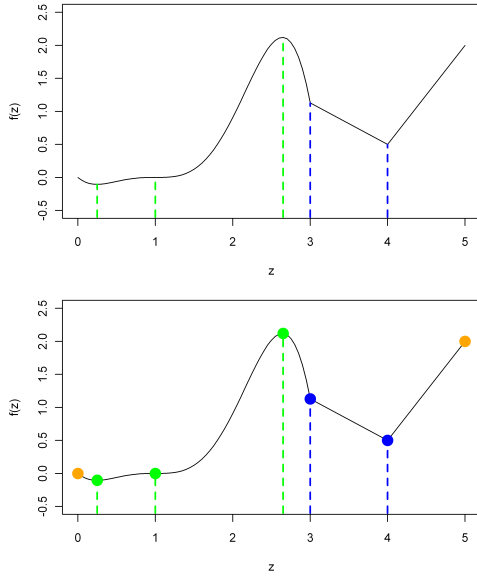
to w punkcie x_0 ma maksimum lokalne właściwe

Odnajdywanie wartości ekstremalnych funkcji w przedziale

Funkcja f jest ciągła na przedziale $\langle a, b \rangle$ oraz ma pochodną właściwą poza skończoną liczbą punktów tego przedziału. Wartości najmniejszej i największej tej funkcji na tym przedziale szukamy w następujący sposób



Znajdujemy punkty $c_1, \dots, c_n$ zerowania się pochodnej funkcji f na przedziale $\langle a, b \rangle$ oraz punkty $d_1, \dots, d_m$, w których pochodna właściwa tej funkcji nie istnieje. Spośród liczb $f(a), f(b); f(c_1), \dots, f(c_n); f(d_1), \dots, f(d_m)$ wybieramy najmniejszą i największą. Będą to odpowiednio wartość najmniejsza oraz największa funkcji f na przedziale $\langle a, b \rangle$



1.2 Wypukłość, wklęsłość

Wypukłość i wklęsłość funkcji

Definicja 5 (Funkcja wypukła). *Funkcja f jest wypukła na przedziale (a, b) , gdzie $-\infty \leq a < b < \infty$, jeżeli:*

$$\bigwedge_{a < x_1 < x_2 < b} \bigwedge_{0 < \lambda < 1} f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$

Definicja 6 (Funkcja ściśle wypukła). *Funkcja f jest ściśle wypukła na przedziale (a, b) , gdzie $-\infty \leq a < b < \infty$, jeżeli:*

$$\bigwedge_{a < x_1 < x_2 < b} \bigwedge_{0 < \lambda < 1} f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$

Definicja 7 (Funkcja wklęsła). *Funkcja f jest wklęsła na przedziale (a, b) , gdzie $-\infty \leq a < b < \infty$, jeżeli:*

$$\bigwedge_{a < x_1 < x_2 < b} \bigwedge_{0 < \lambda < 1} f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$

Definicja 8 (Funkcja ściśle wklęsła). *Funkcja f jest ściśle wklęsła na przedziale (a, b) , gdzie $-\infty \leq a < b < \infty$, jeżeli:*

$$\bigwedge_{a < x_1 < x_2 < b} \bigwedge_{0 < \lambda < 1} f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) > \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$

Twierdzenie 4 (warunek wystarczający wypukłości). *Jeżeli $f''(x) > 0$ dla każdego $x \in (a, b)$, to funkcja f jest ściśle wypukła na (a, b)*

1.3 Punkty przegięcia wykresu funkcji

Definicja 9 (Punkt przegięcia wykresu funkcji). *Punkt $(x_0, f(x_0))$ jest punktem przegięcia wykresu funkcji f wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje takie $\delta > 0$, że funkcja f jest ściśle wypukła na $(x_0 - \delta, x_0)$ oraz ściśle wklęsła na $(x_0, x_0 + \delta)$ albo odwrotnie*

Twierdzenie 5 (Warunek konieczny istnienia punktu przegięcia). *Jeżeli funkcja f spełnia warunki:*

1. $(x_0, f(x_0))$ jest jej punktem przegięcia
2. istnieje $f''(x_0)$

to $f''(x_0) = 0$

Fakt 1. *Funkcja może mieć punkty przegięcia jedynie w punktach zerowania się jej drugiej pochodnej albo w punktach, w których ta pochodna nie istnieje.*

Warunek wystarczający istnienia punktu przegięcia

Twierdzenie 6. *Jeżeli funkcja f spełnia warunki:*

1. w punkcie x_0 ma pochodną właściwą lub niewłaściwą

$$2. \bigvee_{\delta > 0} \begin{cases} f''(x_0) < 0 & \text{dla } x_0 - \delta < x < x_0 \\ f''(x_0) > 0 & \text{dla } x_0 < x < x_0 + \delta \end{cases}$$

to $(x_0, f(x_0))$ jest punktem przegięcia wykresu.

Twierdzenie 7. *Jeżeli funkcja f spełnia warunki:*

1. $f''(x_0) = f'''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$
2. $f^{(n)}(x_0) \neq 0$
3. n jest liczbą nieparzystą, gdzie $n \geq 3$

to $(x_0, f(x_0))$ jest punktem przegięcia jej wykresu

Uwaga 3. *Jeżeli założenie 3. ma postać „ n jest liczbą parzystą”, to $(x_0, f(x_0))$ nie jest punktem przegięcia.*