

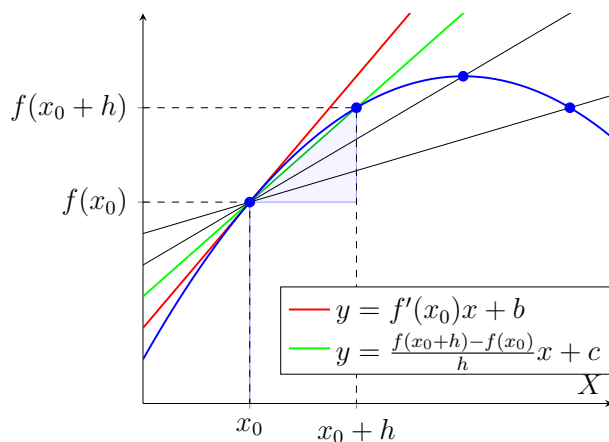
1 Pochodna

1.1 Podstawy

Pochodna

Definicja 1. Pochodną funkcji $f : X \rightarrow Y$ w punkcie $x_0 \in X$ nazywamy liczbę

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$



Fakt 1. Jeżeli funkcja f ma pochodną w x_0 , to jest ciągła w x_0 .

Dowód. Niech $x_n \rightarrow x_0$ oraz $h_n = x_n - x_0$

$$\lim_{x_n \rightarrow x_0} (f(x_n) - f(x_0)) = \lim_{h_n \rightarrow 0} h_n \frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{h_n} = 0 \cdot f'(x_0) = 0$$

□

Przykład

$$f(x) = x^n$$

$$\begin{aligned} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} &= \frac{(x_0 + h)^n - x_0^n}{h} = \frac{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x_0^k h^{n-k} - x_0^n}{h} = \\ &= \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x_0^k h^{n-k}}{h} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x_0^k h^{n-k-1} = \\ &= \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} x_0^k h^{n-k-1} + n x_0^{n-1} = \\ &= h \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} x_0^k h^{n-k-2} + n x_0^{n-1} \xrightarrow{h \rightarrow 0} n x_0^{n-1} \end{aligned}$$

Przykład

$$f(x) = 1/x$$

$$\frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \frac{x - x - h}{h(x+h)x} = -\frac{1}{(x+h)x} \xrightarrow{h \rightarrow 0} -\frac{1}{x^2}$$

Przykład

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$\frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \frac{x+h-x}{(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})h} = -\frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Przykład

$$f(x) = \log_a x$$

$$\begin{aligned} \frac{\log_a(x+h) - \log_a x}{h} &= \frac{1}{h} \log_a \left(\frac{x+h}{x} \right) = \frac{1}{x} \cdot \frac{\log_a(1+h/x)}{h/x} = \\ &= \frac{1}{x} \cdot \log_a(1+h/x)^{\frac{1}{h/x}} = \\ &= \frac{1}{x} \cdot \log_a \left(1 + \frac{1}{x/h} \right)^{(x/h)} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{1}{x} \log_a e \end{aligned}$$

Przykład

$$f(x) = \sin x.$$

Skorzystam z:

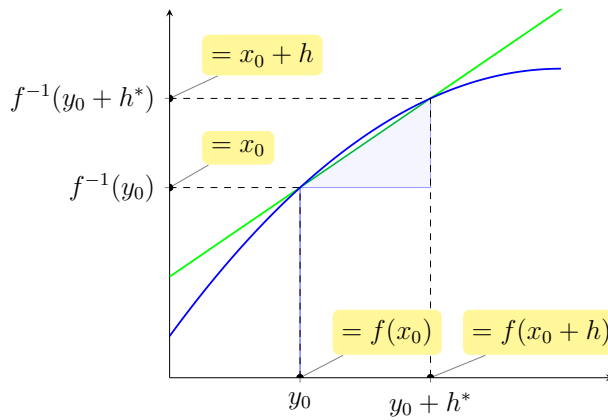
$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1,$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{2 \cos(x + \frac{h}{2})}{h} \sin \frac{h}{2} = \cos(x + h/2) \frac{\sin(h/2)}{h/2} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \cos x$$

Przykład

Niech $g(y) = f^{-1}(y)$ będzie funkcją odwrotną do $f(x)$.



$$\frac{f^{-1}(y_0 + h^*) - f^{-1}(y_0)}{h^*} = \frac{x_0 + h - x_0}{f(x_0 + h) - f(x_0)} = \frac{1}{\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}$$

Zatem mamy wzór

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

$g(y) = \arcsin y$. Przyjmujemy, że $(x = \arcsin y \iff y = \sin x)$

$$g'(y) = \frac{1}{\sin' x} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$$

Przykład (Pochodna iloczynu funkcji)

$f(x)g(x)$

$$\begin{aligned} & \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} = \\ & = \frac{(f(x+h) - f(x))g(x+h) + f(x)(g(x+h) - g(x))}{h} = \\ & = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}g(x+h) + f(x)\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \\ & \xrightarrow{h \rightarrow 0} f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x \sin x)' &= x' \sin x + x \sin' x = 1 \cdot \sin x + x \cos x \\ &= \sin x + x \cos x \end{aligned}$$

Przykład (pochodna złożenia funkcji)

Można pokazać, że

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$$

Zastosujemy ten wzór do wyznaczanie pochodnej funkcji $f(x) = e^x$.

Zauważmy, że $\ln(f(x)) = x$

Stąd

$$\begin{aligned} (\ln(f(x)))' &= x' \\ \frac{1}{f(x)} f'(x) &= 1 \\ f(x)' &= f(x) \end{aligned}$$

1.2 Wzory

Wzory

$$\begin{aligned}
(x^\alpha)' &= \alpha x^{\alpha-1}, \quad x > 0, \alpha \in \mathbb{R} \\
(\sin x)' &= \cos x \\
(\cos x)' &= -\sin x \\
(\operatorname{tg} x)' &= \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x, \quad \cos x \neq 0 \\
(\operatorname{ctg} x)' &= -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \operatorname{ctg}^2 x), \quad \sin x \neq 0 \\
(\arcsin x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1, \quad -\frac{1}{2}\pi < \arcsin x < \frac{1}{2}\pi \\
(\arccos x)' &= \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1, \quad 0 < \arccos x < \pi \\
(a^x)' &= a^x \ln a, \quad a > 0 \\
(\ln |x|)' &= \frac{1}{x}, \quad x \neq 0 \\
(\log_a |x|)' &= \frac{1}{x \ln a} = \frac{1}{x} \log_a e, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad x \neq 0
\end{aligned}$$

Reguły różniczkowania

$$\begin{aligned}
(f+g)'(x) &= f'(x) + g'(x) \\
(f-g)'(x) &= f'(x) - g'(x) \\
(cf)'(x) &= cf'(x), \quad c \in \mathbb{R} \\
(f \cdot g)'(x) &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \\
\left(\frac{f}{g}\right)'(x) &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}, \quad g(x) \neq 0 \\
(f \circ g)'(x) &= f'(g(x)) \cdot g'(x)
\end{aligned}$$

Równanie stycznej do wykresu funkcji

Równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie x_0 ma postać:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Definicja 2. Niech f będzie funkcją ciągłą w punkcie $x_0 \in \mathbb{R}$. Funkcja f ma w punkcie x_0 pochodną niewłaściwą wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \infty$$

albo

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = -\infty$$

Definicja 3 (Pochodna n -tego rzędu).

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)})'(x) \text{ dla } n \geq 2$$

Fakt 2 (Wzór Leibniza).

$$(f \cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$$

We wzorze przyjmujemy $f^{(0)}(x) = f(x)$ i oczywiście $g^{(0)}(x) = g(x)$

1.3 Twierdzenia o funkcjach z pochodnymi

Twierdzenia o funkcjach z pochodnymi

Twierdzenie 1 (Rolle'a). Jeżeli funkcja spełnia warunki:

- jest ciągła na $[a, b]$
- ma pochodną właściwą lub niewłaściwą na (a, b)
- $f(a) = f(b)$

to istnieje punkt $c \in (a, b)$ taki, że $f'(c) = 0$

Twierdzenie 2 (Lagrange'a). Jeżeli funkcja spełnia warunki:

- jest ciągła na $[a, b]$
- ma pochodną właściwą lub niewłaściwą na (a, b)

to istnieje punkt $c \in (a, b)$ taki, że $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Twierdzenie 3 (warunki wystarczające monotoniczności funkcji). *Jeżeli funkcja dla każdego $x \in (a, b)$ spełnia warunek*

- $f'(x) = 0$, to jest stała na przedziale (a, b)
- $f'(x) > 0$, to jest rosnąca na przedziale (a, b)
- $f'(x) \geq 0$, to jest niemalejąca na przedziale (a, b)
- $f'(x) < 0$, to jest malejąca na przedziale (a, b)
- $f'(x) \leq 0$, to jest nierosnąca na przedziale (a, b)

Uwaga: Jeżeli $f'(x) \geq 0$ dla każdego $x \in (a, b)$, przy czym zbiór

$$\{x \in (a, b) \mid f'(x) = 0\}$$

jest skończony, to funkcja f jest rosnąca na (a, b)

Twierdzenie 4 (Cauchy'ego). *Jeżeli funkcje spełniają warunki:*

- są ciągłe na $[a, b]$
- mają pochodne właściwe lub niewłaściwe na (a, b)
- $g'(x) \neq 0$ dla każdego $x \in (a, b)$

to istnieje punkt $c \in (a, b)$ taki, że $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

1.4 Twierdzenia o granicach nieoznaczonych

Twierdzenie 5 (reguła de L'Hospitala dla nieoznaczoności $\frac{0}{0}$). *Jeżeli funkcje f i g spełniają warunki:*

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$, przy czym $g(x) \neq 0$ dla $x \in S(x_0)$
- istnieje granica $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (właściwa lub niewłaściwa)

to

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Twierdzenie jest prawdziwe, jeżeli x_0 zastąpimy przez $x_0^-, x_0^+, -\infty, +\infty$

Twierdzenie 6 (reguła de L'Hospitala dla nieoznaczoności $\frac{\infty}{\infty}$). *Jeżeli funkcje f i g spełniają warunki:*

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$
- *istnieje granica $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (właściwa lub niewłaściwa)*

to

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Twierdzenie jest prawdziwe, jeżeli x_0 zastąpimy przez $x_0^-, x_0^+, -\infty, +\infty$

1.5 Wzór Talora

Wzór Taylora

Twierdzenie 7. *Jeżeli funkcja $f(x)$ ma n -tą pochodną $f^{(n)}(x)$ w pewnym przedziale domkniętym zawierającym punkt a , wówczas dla każdego punktu x z tego przedziału ma miejsce następujący wzór Taylora:*

$$\begin{aligned} f(x) = & f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots \\ & \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c_n)}{n!}(x-a)^n \end{aligned}$$

gdzie $a < c_n < x$ przy $x > a$ i $x < c_n < a$ przy $x < a$

Ostatni wyraz we wzorze Taylora oznaczamy przez R_n :

$$R_n = \frac{f^{(n)}(c_n)}{n!}(x-a)^n$$

i nazywamy resztą wzoru Taylora (w postaci Lagrange'a)

Definicja 4 (Szereg Taylora). *Szereg potęgowy postaci*

$$f(x) = f(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

nazywamy szeregiem Taylora

Twierdzenie 8 (O rozwinięciu funkcji w szereg Taylora). *Funkcja jest rozwijalna w szereg Taylora w przedziale $(a - \delta, a + \delta)$, jeżeli w tym przedziale*

- *funkcja ma pochodne każdego rzędu*
- $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$, gdzie R_n oznacza resztę szeregu podaną we wzorze Taylora

Uwaga 1. Warunek drugi jest w szczególności spełniony, jeżeli wszystkie pochodne $f^{(n)}(x)$ są wspólnie ograniczone w przedziale $(a - \delta, a + \delta)$