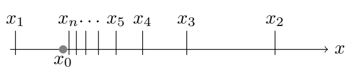
1 Granica funkcji

1.1 Punkt skupienia

Punkty skupienia

Definicja 1. *Punkt x_0 nazwywamy punktem skupiena zbioru $X \subseteq \mathbb{R}$, jeżeli dowolnie blisko x_0 istnieją liczby $x \in X$, różne od x_0.*

Równoważnie możemy powiedzieć, że x_0 jest punktem skupienia X wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ciąg (x_n) taki, że $X \ni x_n \neq x_0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.



Definicja 2. *Punkt x_0 jest prawostronnym (lewostronnym) punktem skupienia X wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ciąg (x_n) taki, że $X \ni x_n > x_0$ ($x_n < x_0$) dla każdego $n \in \mathbb{N}$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.*

Definicja 3. *Mówimy, że ∞ ($-\infty$) jest punktem skupienia zbioru $X \subset \mathbb{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ciąg (x_n) taki, że $X \ni x_n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ ($-\infty$).*

1.2 Definicje granic

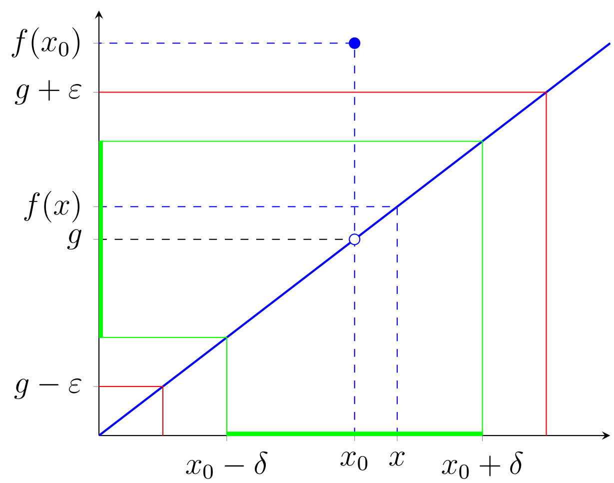
Granice funkcji

Definicja 4 (Granica funkcji)**.** *Niech $X, Y \subset \mathbb{R}$, $f : X \to Y$, x_0-punkt skupienia zbioru X. Będziemy pisali*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = g$$

jeżeli istnieje punkt $g \in R$ o następujących własnościach:

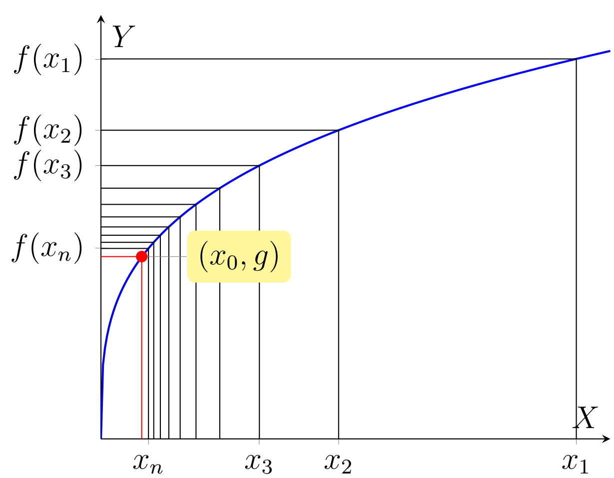
$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{\delta>0} \bigwedge_{x\in X} [0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - g| < \varepsilon]$$



Twierdzenie 1 (Równoważność definicji granicy funkcji)**.**

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = g \iff \lim_{n\to\infty} f(x_n) = g \textit{ dla dowolnego ciągu } (x_n) \textit{ takiego, że: } X \ni x_n \neq x_0 \textit{ dla każdego } n \in \mathbb{N} \textit{ oraz } \lim_{n\to\infty} x_n = x_0$$

Prawa strona równoważności, to tzw. definicja Heinego granicy funkcji.



$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = g$$

Definicja 5 (Definicje granic funkcji)**.** *Niech* $X, Y \subset \mathbb{R}$, $f : X \to Y$ *oraz* $x_n \in X$ *dla każdego* $n \in \mathbb{N}$.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = g \iff \bigwedge_{x_n\to\infty} \lim_{n\to\infty} f(x_n) = g$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = g \iff \bigwedge_{x_n\to-\infty} \lim_{n\to\infty} f(x_n) = g$$
$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = g \iff \bigwedge_{\substack{x_n\to x_0\\ x_n>x_0}} \lim_{n\to\infty} f(x_n) = g$$
$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = g \iff \bigwedge_{\substack{x_n\to x_0\\ x_n<x_0}} \lim_{n\to\infty} f(x_n) = g$$

Uwaga: $g \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$

1.3 Arytmetyka granic

Twierdzenie 2 (o arytmetyce granic funkcji)**.** *Jeżeli funkcje* f, g *mają granice (skończone) w punkcie* x_0, *to*

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$$
$$\lim_{x\to x_0}(f(x)-g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) - \lim_{x\to x_0} g(x)$$
$$\lim_{x\to x_0}(cf(x)) = c(\lim_{x\to x_0} f(x)), \text{ gdzie } c \in \mathbb{R}$$
$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)) = (\lim_{x\to x_0} f(x))\cdot(\lim_{x\to x_0} g(x))$$
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)} \text{ o ile } \lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0$$
$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = (\lim_{x\to x_0} f(x))^{\lim_{x\to x_0} g(x)}$$

Uwaga: Wzory są prawdziwe, jeżeli x_0 *zastąpimy przez* x_0^+, x_0^-, $-\infty$ *lub* ∞. *Trzeba założyć, że wyrażenia w ostatnim wzorze mają sens.*

Twierdzenie 3 (o granicy funkcji złożonej)**.** *Jeżeli funkcje* f, g *spełniają warunki:*

- $\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0$

- $f(x) \neq y_0$ *dla każdego* $x \in S(x_0)$
- $\lim\limits_{y \to y_0} g(y) = g$

to $\lim\limits_{x \to x_0} g(f(x)) = g$

Uwaga: Twierdzenie jest prawdziwe dla pozostałych typów granic. Zbiór $S(x_0)$ *jest postaci* $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$ *dla pewnego* $\delta > 0$.

1.4 Przykłady granic

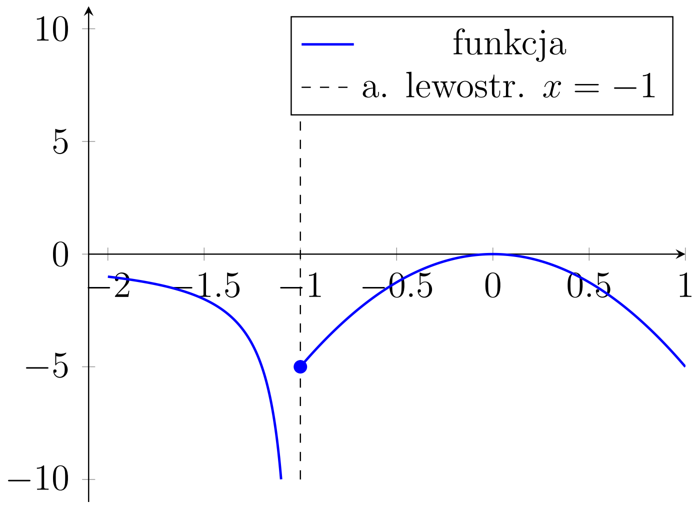
Granice podstawowych wyrażeń nieoznaczonych

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$	$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x} = 1$
$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} = \ln a, \text{ gdzie } a > 0$	$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$
$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e, \text{ gdzie } 0 < a \neq 1$	$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$
$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(1 + \dfrac{a}{x}\right)^x = e^a, \text{ gdzie } a \in \mathbb{R}$	$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$
$\lim\limits_{x \to 0} (1+x)^{1/x} = e$	$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1+x)^a - 1}{x} = a,$ gdzie $a \in \mathbb{R}$

1.5 Asymptoty funkcji

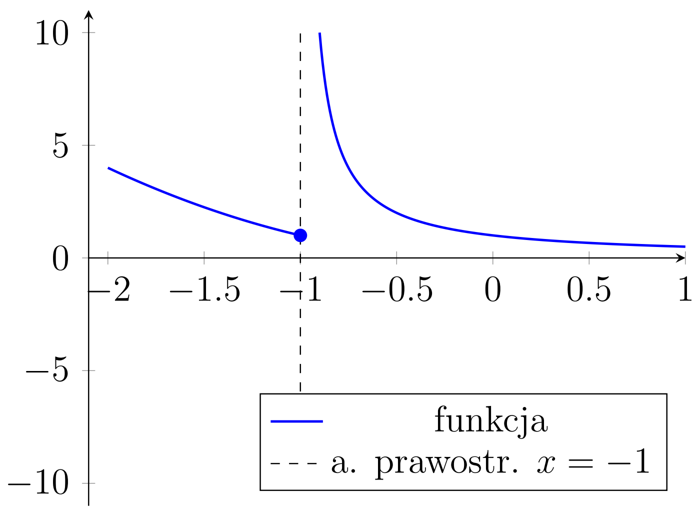
Definicja 6 (Asymptota pionowa lewostronna)**.** *Prosta* $x = a$ *jest asymptotą pionową lewostronną funkcji* f *jeżeli*

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty \text{ albo } \lim_{x \to a^-} f(x) = \infty$$

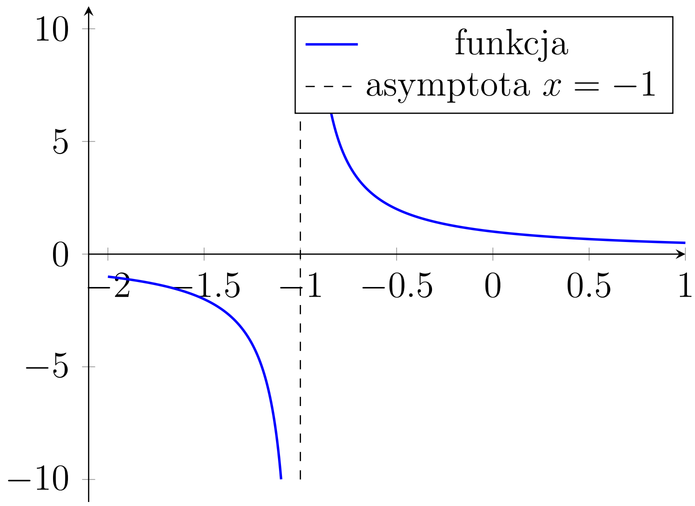


Definicja 7 (Asymptota pionowa prawostronna)**.** *Prosta $x = a$ jest asymptotą pionową prawostronną funkcji f jeżeli*

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty \text{ albo } \lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$$

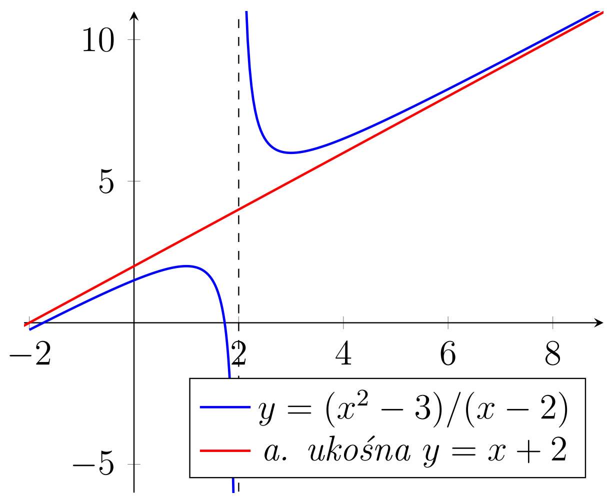


Definicja 8 (Asymptota pionowa)**.** *Prosta $x = a$ jest asymptotą pionową funkcji jeżeli jest jednocześnie asymptotą lewostronną i prawostronną*



Definicja 9 (Asymptota ukośna). *Prosta $y = ax + b$ jest asymptotą ukośną funkcji f w $+\infty$ $(-\infty)$ wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\lim_{\substack{x\to\infty \\ (x\to-\infty)}} [f(x) - (ax + b)] = 0$$



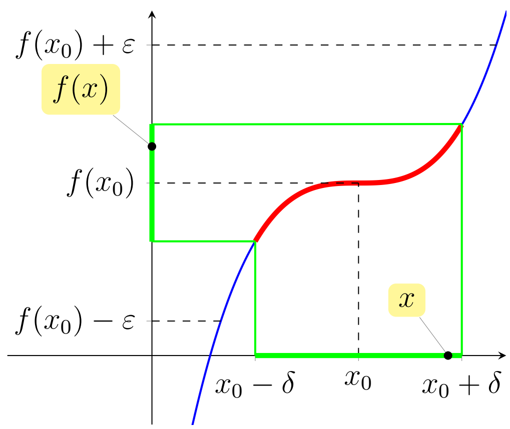
Fakt 1. *Prosta $y = ax + b$ jest asymptotą ukośną funkcji f w ∞ $(-\infty)$ wtedy i tylko wtedy, gdy*

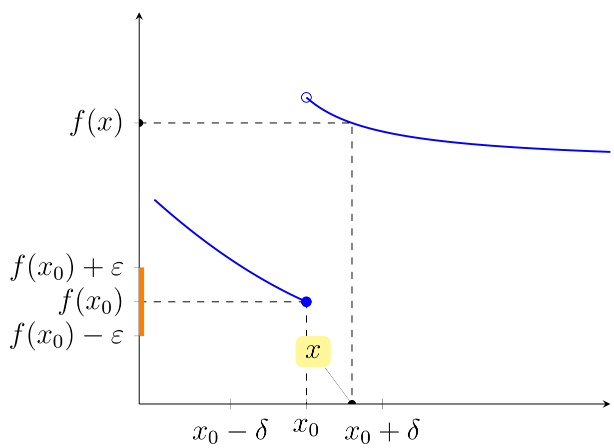
$$a = \lim_{\substack{x\to\infty \\ (x\to-\infty)}} \frac{f(x)}{x} \text{ oraz } b = \lim_{\substack{x\to\infty \\ (x\to-\infty)}} [f(x) - ax]$$

1.6 Ciągłość funkcji

Definicja 10. *Niech $X, Y \subset \mathbb{R}$, $f : X \to Y$, $x_0 \in X$. O funkcji f powiemy, że jest ciągła w punkcie x_0, jeżeli*

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{\delta>0} \bigwedge_{x\in X} [|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon]$$





Punkt nieciągłości

Twierdzenie 4. *W sytucji opisanej w powyższej definicji niech x_0 będzie punktem skupienia zbioru X. Funkcja f jest ciągła w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$*

Definicja 11. *Funkcja $f : X \to Y$ jest ciągła, jeżeli jest ciągła w każdym punkcie $p \in X$.*

Twierdzenie 5. *Niech f, g będą funkcjami ciągłymi na X. Wówczas $f + g$, $f \cdot g$ oraz f/g są funkcjami ciągłymi. W ostatnim przypadku zakładamy, ze $g \neq 0$*