1 Funkcje

1.1 Podstawowe pojęcia

Funkcje

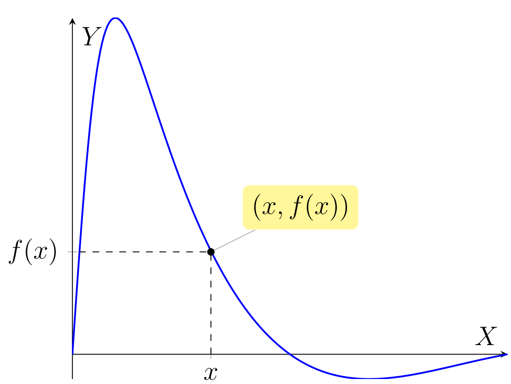
Definicja 1 (Funkcja)**.** *Funkcją określoną na zbiorze $X \subseteq \mathbb{R}$ o wartościach w zbiorze $Y \subseteq \mathbb{R}$ nazywamy przyporządkowanie każdemu elementowi $x \in X$ dokładnie jednego elementu $y \in Y$. Funkcję taką oznaczamy przez $f : X \to Y$.*

Definicja 2 (Dziedzina i przeciwdziedzina funkcji)**.** *Niech $f : X \to Y$. Wtedy zbiór X nazywamy dziedziną funkcji f, a zbiór Y nazywamy jej przeciwdziedziną.*

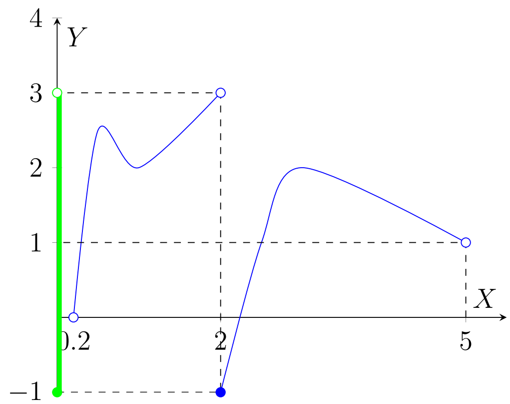
Uwaga 1. *Jeżeli jest dany wzór określający funkcję, to zbiór tych elementów z $\mathbb{R}$, dla których wzór ten ma sens, nazywamy dziedziną naturalną funkcji.*

Definicja 3 (Wykres funkcji)**.** *Wykresem funkcji $f : X \to Y$ nazywamy zbiór*

$$\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 : \; x \in X\}$$



Definicja 4 (Zbiór wartości funkcji)**.** *Zbiór $f(X) = \{f(x) : \; x \in X\}$ nazywamy zbiorem wartości funkcji $f : X \to Y$.*



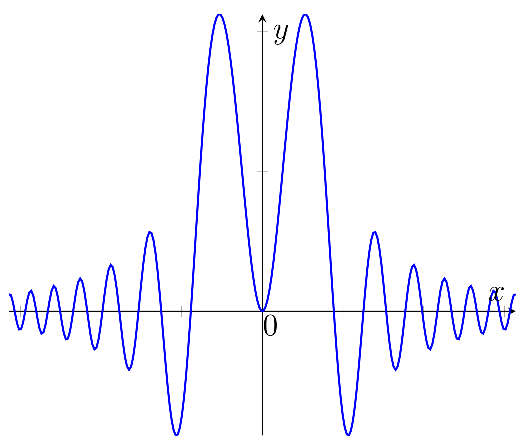
$X = (0.2, 5), \ f(X) = \langle -1, 3)$

Definicja 5 (Równość funkcji)**.** *Funkcje* $f : X \to Y$, $g : Z \to Y$ *są równe, co zapisujemy* $f = g$, *wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$X = Z \text{ oraz } \bigwedge_{x \in X} f(x) = g(x)$$

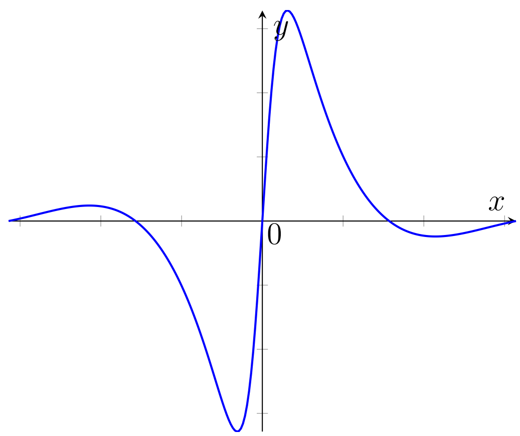
Definicja 6 (Funkcja parzysta)**.** *Funkcja* $f : X \to \mathbb{R}$ *jest parzysta, jeżeli*

$$\bigwedge_{x \in X} \Big(-x \in X \text{ oraz } f(-x) = f(x) \Big)$$



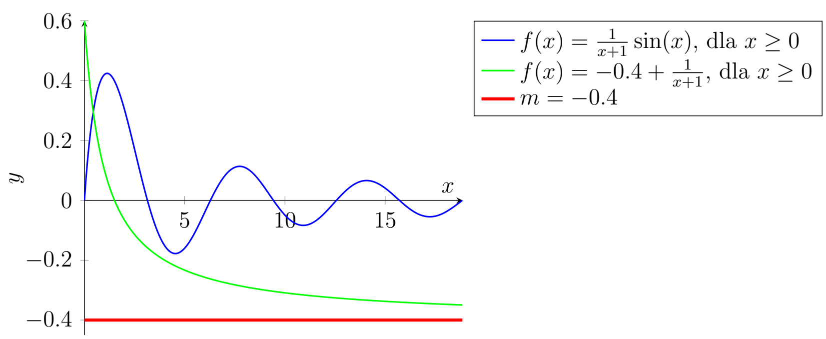
Definicja 7 (Funkcja nieparzysta)**.** *Funkcja* $f : X \to \mathbb{R}$ *jest nieparzysta, jeżeli*

$$\bigwedge_{x \in X} \Big(-x \in X \text{ oraz } f(-x) = -f(x) \Big)$$



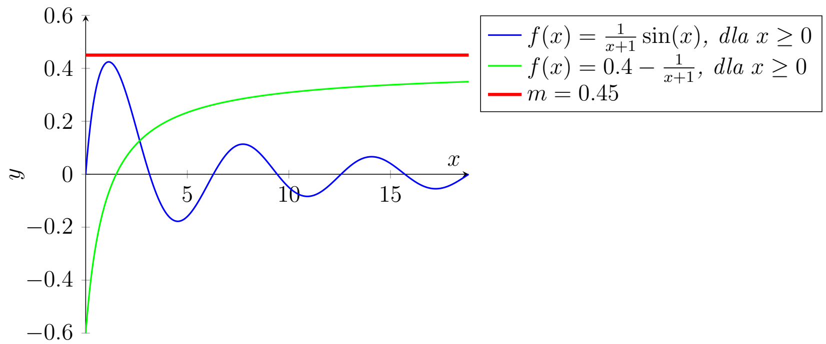
Definicja 8 (Funkcja ograniczona z dołu)**.** *Funkcja* $f : X \to \mathbb{R}$ *jest ograniczona z dołu na zbiorze* $A \subseteq X$*, jeżeli zbiór jej wartości na tym zbiorze jest ograniczony z dołu, tzn.*

$$\bigvee_{m \in \mathbb{R}} \bigwedge_{x \in A} f(x) \geq m$$



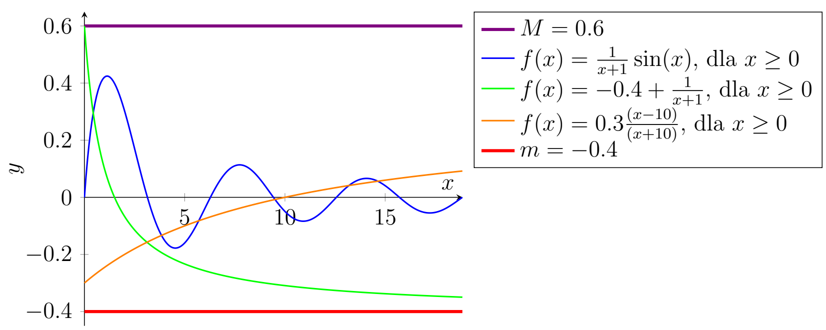
Definicja 9 (Funkcja ograniczona z góry)**.** *Funkcja* $f : X \to \mathbb{R}$ *jest ograniczona z góry na zbiorze* $A \subseteq X$*, jeżeli zbiór jej wartości na tym zbiorze jest ograniczony z góry, tzn.*

$$\bigvee_{m \in \mathbb{R}} \bigwedge_{x \in A} f(x) \leq m$$



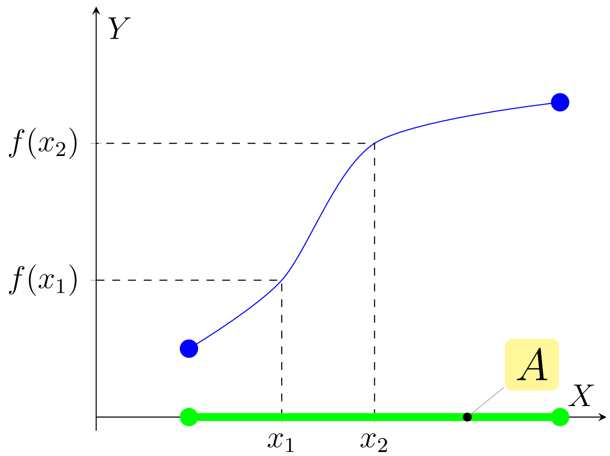
Definicja 10 (Funkcja ograniczona)**.** *Funkcja* $f : X \to \mathbb{R}$ *jest ograniczona na zbiorze* $A \subseteq X$*, jeżeli jest ograniczona z dołu i z góry na tym zbiorze, tzn.*

$$\bigvee_{m,M \in \mathbb{R}} \bigwedge_{x \in A} m \leq f(x) \leq M$$



Definicja 11 (Funkcja rosnąca)**.** *Funkcja* $f : X \to \mathbb{R}$ *jest rosnąca na zbiorze* $A \subseteq X$*, jeżeli*

$$\bigwedge_{x_1, x_2 \in A} \left[\Big(x_1 < x_2 \Big) \Rightarrow \Big(f(x_1) < f(x_2) \Big) \right]$$



Definicja 12 (Funkcja malejąca)**.** *Funkcja $f : X \to \mathbb{R}$ jest malejąca na zbiorze $A \subseteq X$, jeżeli*

$$\bigwedge_{x_1, x_2 \in A} \left[\left(x_1 < x_2 \right) \Rightarrow \left(f(x_1) > f(x_2) \right) \right]$$

Definicja 13 (Funkcja niemalejąca)**.** *Funkcja $f : X \to \mathbb{R}$ jest niemalejąca na zbiorze $A \subseteq X$, jeżeli*

$$\bigwedge_{x_1, x_2 \in A} \left[\left(x_1 < x_2 \right) \Rightarrow \left(f(x_1) \leq f(x_2) \right) \right]$$

Definicja 14 (Funkcja nierosnąca)**.** *Funkcja $f : X \to \mathbb{R}$ jest nierosnąca na zbiorze $A \subseteq X$, jeżeli*

$$\bigwedge_{x_1, x_2 \in A} \left[\left(x_1 < x_2 \right) \Rightarrow \left(f(x_1) \geq f(x_2) \right) \right]$$

Definicja 15 (Funkcja różnowartościowa)**.** *Funkcja $f : X \to \mathbb{R}$ jest różnowartościowa na zbiorze $A \subseteq X$, jeżeli*

$$\bigwedge_{x_1, x_2 \in A} \left[\left(x_1 \neq x_2 \right) \Rightarrow \left(f(x_1) \neq f(x_2) \right) \right]$$

Definicja 16 (Funkcja „na")**.** *Funkcja $f : X \to Y$ jest funkcją „na" zbiór Y wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$f(X) = Y$$

Definicja 17 (Funkcja wzajemnie jednoznaczna)**.** *Funkcja $f : X \to Y$ jest wzajemnie jednoznaczna wtedy i tylko wtedy, gdy jest różnowartościowa w swojej dziedzinie oraz jest „na" zbiór Y.*

Definicja 18 (Funkcja odwrotna)**.** *Niech funkcja $f : X \to Y$ będzie wzajemnie jednoznaczna. Funkcją odwrotną do f nazywamy funkcję $f^{-1} : Y \to X$ określoną przez warunek*

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y, \text{ gdzie } x \in X, y \in Y.$$

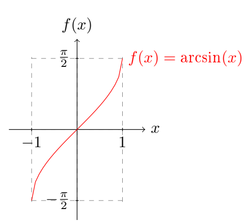
Definicja 19 (Złożenie funkcji)**.** *Niech $X, Y, Z, W \subseteq \mathbb{R}$ oraz $Y \subseteq Z$ oraz niech $f : X \to Y$, $g : Z \to W$. Złożeniem funkcji g i f nazywamy funkcję $g \circ f : X \to W$ określoną wzorem*

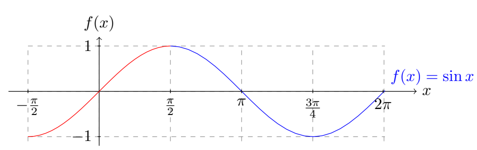
$$g \circ f(x) = g(f(x)), \text{ dla } x \in X$$

Fakt 1. *Niech funkcja $f : X \to Y$ będzie wzajemnie jednoznaczna. Wtedy*

$$\bigwedge_{x \in X} f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{oraz} \quad \bigwedge_{x \in X} f(f^{-1}(y)) = y$$

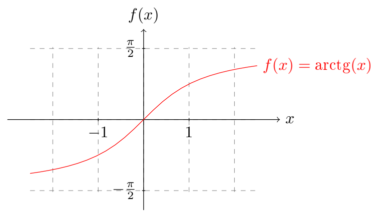
arcsin(x)
Funkcją arcsin (arkus sinus) nazywamy funkcję odwrotną do funkcji sinus obciętej do przedziału $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

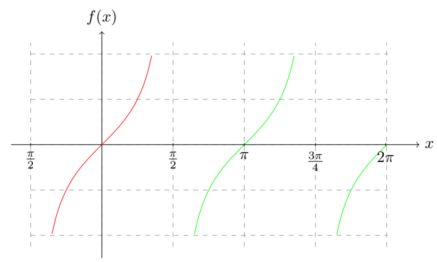


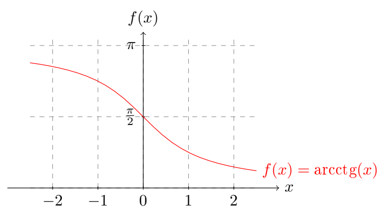


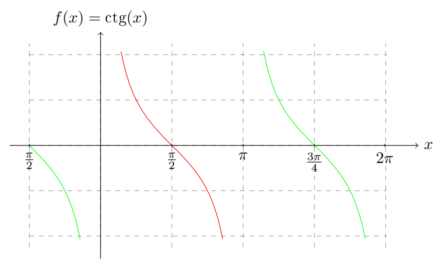
arctg(x)
Funkcją arctg (arkus tangens) nazywamy funkcję odwrotną do funkcji tangens obciętej do przedziału $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Dziedziną funkcji arctg(x) jest $\mathbb{R}$.

arcctg(x)
Funkcją arcctg (arkus kotangens) nazywamy funkcję odwrotną do funkcji kotangens obciętej do przedziału $(0, \pi)$. Dziedziną funkcji arcctg(x) jest $\mathbb{R}$.









Przypomnienie

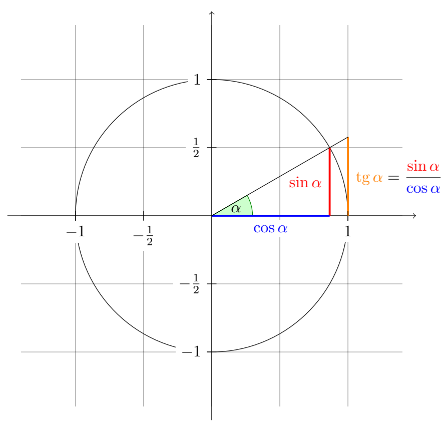
Logarytmy - najważniejsze wzory

Definicja 20 (Logarytm)**.** *Logarytmem liczby b przy podstawie a nazywamy taką liczbę c, że a podniesione do potęgi c daje liczbę b:* $\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$

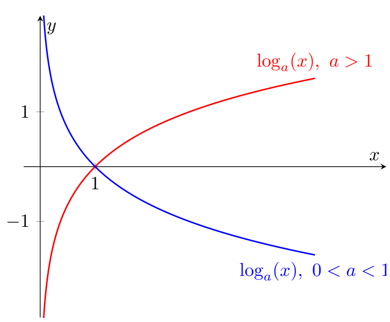
Wzory
Jeżeli $a > 0, a \neq 1, b > 0$ oraz $c > 0$, to zachodzą następujące wzory:

$$\log_a b + \log_a c = \log_a(b \cdot c)$$
$$\log_a b - \log_a c = \log_a\left(\frac{b}{c}\right)$$
$$n \log_a b = \log_a(b^n) = \log_{a^{\frac{1}{n}}} b$$
$$a^{\log_a b} = b$$
$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Wykres



1
$\frac{1}{2}$
$-\frac{1}{2}$
-1
-1
$-\frac{1}{2}$
1
α
$\sin\alpha$
$\cos\alpha$
$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$



y
$\log_a(x),\ a > 1$
1
x
1
-1
$\log_a(x),\ 0 < a < 1$