

# 1 Zastosowania ekonomiczne ciągów

## Zastosowania ekonomiczne ciągów

**Definicja 1** (Stopa wzrostu ciągu). Niech  $(a_n)$  będzie ciągiem o wyrazach dodatnich. Stopą wzrostu (tempem wzrostu) wyrazu  $a_n$  jest dla  $n \geq 2$  iloraz

$$k_n = \frac{a_n - a_{n-1}}{a_{n-1}},$$

a dla  $n = 1$

$$k_1 = 0$$

Stopą wzrostu (tempem wzrostu) ciągu  $(a_n)$  jest ciąg  $(k_n)$ .

### Przykład

Niech  $(a_n)$  będzie nieujemnym ciągiem arytmetycznym o różnicy  $r$ . Wtedy dla  $n \geq 2$   $a_n = a_{n-1} + r = a_1 + (n-1)r$ . Zatem

$$k_n = \frac{r}{a_1 + (n-2)r}.$$

Zauważmy, że  $\lim_{n \rightarrow \infty} k_n = 0$

### Przykład

Niech  $(a_n)$  będzie nieujemnym ciągiem geometrycznym o ilorazie  $q$ . Wtedy dla  $n \geq 2$   $a_n = q \cdot a_{n-1} = a_1 q^{n-1}$ . Zatem

$$k_n = \frac{a_1 q^{n-1} - a_1 q^{n-2}}{a_1 q^{n-2}} = q - 1.$$

Zauważmy, że  $(k_n) = (0, q-1, q-1, q-1, \dots)$

### Możemy powiedzieć

1. Jeśli dochód narodowy w poszczególnych latach jest stały, to stopa wzrostu dochodu narodowego jest stała.
2. Jeśli dochód narodowy zmienia się zgodnie z ciągiem arytmetycznym, to stopa wzrostu dochodu narodowego dąży do zera.
3. Jeśli dochód narodowy zmienia się zgodnie z szeregiem geometrycznym, to stopa wzrostu dochodu narodowego jest stała.

### *Procent prosty*

Kapitał  $K_0$  złożono w banku przy oprocentowaniu rocznym  $p$  procent bez kapitalizacji odsetek. Oznacza to, że po każdym roku kapitał zwiększa się o tę samą kwotę równą  $K_0 \frac{p}{100}$ . Zatem ciąg  $(K_n)$ , gdzie  $K_n$  oznacza łączną wartość kapitału po  $n$  latach, jest ciągiem arytmetycznym o różnicy  $K_0 \frac{p}{100}$ . Stąd

$$K_n = K_0 + nK_0 \frac{p}{100} = K_0 \left(1 + n \frac{p}{100}\right).$$

Stopa wzrostu kapitału bez kapitalizacji odsetek dąży do zera.

### *Procent składany*

Kapitał  $K_0$  złożono w banku przy oprocentowaniu rocznym  $p$  procent z kapitalizacją odsetek. Oznacza to, że po każdym roku kapitał zwiększa się o  $p$  procent w stosunku do kapitału w roku poprzednim. Zatem ciąg  $(K_n)$ , gdzie  $K_n$  oznacza łączną wartość kapitału po  $n$  latach jest ciągiem geometrycznym o ilorazie  $q = 1 + \frac{p}{100}$ . Stąd

$$K_n = \left(1 + \frac{p}{100}\right) K_{n-1} = K_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n.$$

Liczbę  $\left(1 + \frac{p}{100}\right)$  nazywamy *czynnikami oprocentowującym*. Stopa wzrostu kapitału z kapitalizacją odsetek jest stała

### *Okresowa kapitalizacja odsetek*

Kapitał  $K_0$  złożono w banku przy oprocentowaniu rocznym  $p$  procent z kapitalizacją odsetek co  $1/k$  roku. Oznacza to, że po okresie  $1/k$  roku kapitał zwiększa się o  $p/k$  procent w stosunku do kapitału z poprzedniego okresu. Ciąg  $(K_n)$ , gdzie  $K_n$  oznacza łączną wartość kapitału po  $n$  okresach jest ciągiem geometrycznym, dla którego zachodzi

$$K_n = \left(1 + \frac{p}{k \cdot 100}\right) K_{n-1} = K_0 \left(1 + \frac{p}{k \cdot 100}\right)^n.$$

Zatem, jeżeli kapitał 100 tysięcy złotych złożono na pięć lat przy oprocentowaniu rocznym 15% z kwartalną kapitalizacją odsetek, to

$$K_{20} = 100 \cdot \left(1 + \frac{15}{4 \cdot 100}\right)^{20}$$

oznacza kapitał po pięciu latach (dwudziestu kwartałach:  $n = 5 \cdot k = 5 \cdot 4 = 20$ ). Zauważmy, że po jednym roku, czyli po  $k$  okresach kapitalizacji,

zgromadzony kapitał wynosi

$$K_k = K_0 \left(1 + \frac{p}{k \cdot 100}\right)^k$$

Liczbę  $\left(1 + \frac{p}{k \cdot 100}\right)^k$  nazywamy *efektywnym czynnikiem oprocentowującym*

*Oprocentowanie ciągle*

Przyjmowanie coraz krótszych okresów kapitalizacji odsetek oznacza przyjmowaniu coraz większych wartości dla  $k$ . Jeżeli liczba  $k$  okresów kapitalizacji dąży do nieskończoności, to uzyskujemy tzw. *oprocentowanie ciągle* kapitału. W takim przypadku po roku zgromadzimy kapitał w wysokości

$$K_\infty = K_0 \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{p}{k \cdot 100}\right)^k = K_0 e^{p/100}.$$

**Twierdzenie 1.**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x, \quad x \in \mathbb{R}$$

**Uwaga 1.**  $e^x = \exp\{x\}$ ,  $e \approx 2.72$

**Zadanie 1.** *Który z poniższych wariantów jest korzystniejszy?*

1. *oprocentowanie roczne 36% z roczną kapitalizacją odsetek*
2. *oprocentowanie roczne 30% z miesięczną kapitalizacją odsetek*
3. *oprocentowanie roczne 32% z kwartalną kapitalizacją odsetek*
4. *oprocentowanie ciągle roczne wynoszące 30%*